SHARTLI KORREKTLIK TUSHUNCHASI.SHARTLI KORREKTLIK TA’RIFI. TIXONOV TEOREMASI.L-KORREKTLIK TUSHUNCHASI.SHARTLI KORREKTLIKNING FIZIK MA’NOSI.

Azizov Muzaffar Sulaymonovich
Farg’ona Davlat Universiteti matematik analiz va differensial tenglamalar kafedrasi katta o’qituvchisi, fizika-matematika fanlar bo’yicha falsafa doktori (PHD).
Muzaffar.azizov.1988@gmail.com
Komilova Fotimaxon Tavakkaljon qizi
Farg’ona Davlat Universiteti talabasi. komilovafotimaxon@gmail.com
Davronboyeva Muqaddam Shukurjon qizi
muqaddamotaqo'ziyeva@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada nokorrekt masalalarning matematik modellarni yaratishda tutgan o‘rni, ularni hal etishdagi asosiy yondashuv — Tixonov regulyarizatsiyasi va L-korrektlik tushunchalari ko‘rib chiqilgan. Masalaning klassik va Tixonov ma’nosidagi korrektlik mezonlari solishtirilib, fizik va geofizik jarayonlarda uchraydigan teskari masalalar misollar orqali tahlil qilingan.*

Kalit so‘zlar: *Nokorrekt masala, teskari masala, Tixonov regulyarizatsiyasi, Tixonov teoremasi, L-korrektlik, Hadamard shartlari, Fredgolm tenglamasi, issiqlik tarqalishi, analitik davom ettirish, barqarorlik, chiziqli operator.*

Аннотация: *В данной статье рассматриваются особенности некорректно поставленных задач в построении математических моделей физических процессов. Основное внимание уделяется регуляризации Тихонова и понятию L-корректности. Также анализируются различия между классическим и тихоновским определениями корректности задач. Приведены примеры обратных задач, возникающих в геофизике и математической физике.*

Ключевые слова: *Некорректная задача, обратная задача, регуляризация Тихонова, теорема Тихонова, L-корректность, условия Адамара, уравнение Фредгольма, теплопроводность, аналитическое продолжение, устойчивость, линейный оператор.*

Abstract: *This article discusses the role of ill-posed problems in the construction of mathematical models of physical processes. Special emphasis is placed on Tikhonov regularization and the concept of L-correctness. The distinctions between classical and Tikhonov definitions of correctness are analyzed. Several examples of inverse problems in geophysics and mathematical physics are provided to illustrate the theory.*

Keywords: *Ill-posed problem, inverse problem, Tikhonov regularization, Tikhonov theorem, L-correctness, Hadamard conditions, Fredholm equation, heat conduction, analytic continuation, stability, linear operator.*

KIRISH

Fizik jarayonlarning matematik modellarini yaratishda nokorrekt masalalar uchrashi ancha ilgari qayd qilingan. Ammo nokorrekt masalalar hech qanday fizik jarayonlar bilan bog‘liq emas deb kelingan. Bu xildagi masalalarni o‘rganish o‘tgan asrning 40-yillarida geofizik jarayonlarni talqin qilishda A.N. Tixonovning ilmiy ishlarida zaruriyat paydo bo‘ldi. Bunda u birinchi bo‘lib nokorrekt masalalarni quyilishida qo‘shimcha shartlar qo‘yilishi va bu shartlarni fizik jarayonlarning o‘zidan kelib chikishining ta’kidlab o‘tdi. Keyinchalik ko‘pchilik fizik jarayonlarga mos keluvchi masalalar nokorrekt masalalardan iborat ekanligi aniqlandi. Shulardan bir nechtasini misol qilib keltiramiz. Issiqlik tarqalish jarayoni sodir bo‘layotgan sterjenda uning nuktalari temperaturasini o‘lchash masalasini yoki diffuziya jarayonini kuzataylik. Har ikkala jarayon issiqlik tarqalish tenglamasi orqali yozilishini ham bilamiz. Bu masalalarda Koshi sharti sifatida asboblar ko‘rsatkichi olinadi. Agar bizni issiqlik tarqalishining yoki diffuziya hodisasining kelajagi qiziqtirsa biz klassik ma’noda korrekt qo‘yilgan masalaga kelamiz. Agar bizni issiqlik tarqalishining yoki diffuziya hodisasining ta’rixi qiziqtirsa biz klassik ma’noda korrekt bo‘lmagan masalaga kelamiz. Nokorrekt va teskari masalaarning korrekt bo‘lmagan masalalaridan biri bo‘lgan analitik davom ettirish masalasi geofizikaning quyidagi masalasi bilan bog‘liq. Er yuzida gravitatsion maydon kuchlanganligining biror komponentasini o‘lchash jarayonini qaraylik . Agar er osti tuzilishidagi fundament birjinsli bo‘lmagan xususiyatga ega bo‘lsa, gravitatsion maydon potensiali grafigi nochiziqli bo‘ladi. Maydoning potensialiga asosan fundament tuzilishini aniqlash muhim masala bo‘lib, bu geofizikaning asosiy masalalaridan hisoblanadi. Matematik fizika masalalrini yechishdagi asosiy usullardan biri integral tenglamalar usulidir. Matematik fizikaning nokorrekt quyilgan masalalari Fredgolmning birinchi tur integral tenglamasiga keltiriladi.

ASOSIY QISM

Nokorrekt masalasi Adamar (klassik) ma’nosida korrekt qo‘yilgan deyiladi, agar

1. masala yechimi mavjud,
2. masala yechimi yagona,
3. masala yechimi uning berilganlariga uzluksiz ravishda bog‘liq.

Korrekt masalasining yechimi va uning berilganlari biror funksional fazoning elementlari bo‘lganligi uchun yechimning mavjudligi, yagonaligi va turg‘unligi shu fazo elemetlari asosida olinadi. Shuning uchun, korrektlik shartlari quyidagicha kiritiladi:

1. Masala berilganlarining C^k, H, L_P yoki $W_p^{(l)}$ fazolarning yopiq to‘plam ostidagi hamma qiymatlari uchun masala yechimi mavjud. Ko‘pchilik hollarda fazoning to‘plam ostisi o‘rnida fazoning o‘zi bo‘lishi ham mumkin.

2. Masala berilganlarining biror sinfdagi har bir elementi uchun yechim biror sinfda yagona.

3. Berilganlarning C^k, H, L_P yoki $W_p^{(l)}$ dagi cheksiz kichik variatsiyasiga dagi cheksiz kichik variatsiyasi mos kelsa. Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi, issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo‘yilgan Koshi masalasining ta’rixi yoki analitik davom ettirish masalasi

$$\int_a^b K(x,s)u(s)ds = fx$$

integral tenglamaga keltiriladi, bunda chegaralari quyidagicha aniqlanadi.

1). $K(x,s) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{k}sh(-ky)sinkxsinks \quad a = 0, b = \pi$

2. $K(x,s) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n} e^{-kt} \; sinkxsinks \quad a = 0, b = \pi$

3).K(x,s)=$\frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+(x-c)^2}$, $\quad a = \infty,\ b = \pi.$

Biz (1) tenglama oʻrniga umumiyroq boʻlgan

$$Az = u \ (2)$$

chiziqli operator tenglamani qaraymiz. Bunda z va u funksiyalar Z va U fazo elementlari boʻlib, A- chizikli toʻla uzluksiz operator. Biz asosan X va F – Gilbert fazolari boʻlgan holga toʻxtalamiz. (1) tenglamani yechish masalasi A operator toʻla uzluksiz boʻlganda turgʻunlik xususiyatiga ega boʻlmaydi. Bunga sabab A^{-1} operatorning chegaralanmaganligidadir. Shu sababli, u funksiyani oʻlchashdagi kichik xatolar z funksiyani aniqlashda katta xatolarga olib keladi. operator tenglamani yechishning korrektligi F va U fazolarga bogʻliq. Berilgan masala F va ning ba’zi juftligi uchun korre kt boʻlsa, boshqa juftligi uchun nokorrekt boʻlishi mumkin. Lekin, (1) operator tenglamani yechish fizik masalalardan kelib chiqsa, f funksiya ixtiyoriy fazo elementlari boʻlaolmaydi. Koʻpchilik hollarda F fazo C yoki L_2 boʻlishi mumkin. Matematik analizning differensiallash masalasi:

$$\int_a^x \varphi(y)dy = f(x) \qquad (3)$$

integral tenglamaga keladi. Differensiallash masalasi C,C^1 va L_2 , $W_2^{(1)}$ fazolar jufti uchun korrekt qoʻyilgan boʻlib, C, C va L_2 , L_2 fazolar jufti uchun korrekt qoʻyilmagan boʻladi. Lekin f(x) ning qiymatlari C yoki L_2 fazo normasida berilganligi uchun bu masalani korrekt qoʻyib boʻlmaydi.

Misol . $\boldsymbol{u_{tt} = u_{xx}}$ tenglamaning xarakteristik toʻrtburchakda berilgan Dirixle masalasini korrekt qoʻyilmaganligini isbotlaymiz. Gursa masalasida xarakteristik toʻrtburchakning qoʻshni tomonida berilganlariga koʻra yagona ravishda xarakteristik toʻrtburchak ichida tenglama yechimini aniqlash mumkin. Shuning uchun tenglama yechimini xarakteristik toʻrtburchakda aniqlash uchun soha chegarasida Dirixle shartini qoʻyish shart emas. Toʻlqin tenglamasi uchun Dirixle sharti yagona yechimni aniqlashda ortiqchalik qiladi. Ortiqcha shartlar asosida masala yechimga ega boʻlmasligi mumkin. Bu aytilganlarga koʻra toʻlqin tenglamasi uchun Dirixle masalasi korrekt qoʻyilmagan boʻladi.

Misol. $\boldsymbol{u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 \leq x < \infty}$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < \infty$$

$$du(0,t) = \boldsymbol{\psi(t)}, \qquad 0 \leq t < \infty \quad \varphi(0) = \psi(0), \qquad \varphi''(0) = \psi''(0)$$

aralash masalani korrekt qo'yilmaganligini isbotlang. Bu masalaga mos bir jinsli masala nolmas yechimga ega:

$$u(x,t)=\begin{cases}\omega\left(\frac{x+t}{2}\right)-\omega\frac{(x-t)}{2}, & v-t\geq 0\\ \omega\left(\frac{x+t}{2}\right)-\omega\frac{(t-x)}{2}, & x-t\leq 0\end{cases}$$

bunda $\omega(x,t)$ ixtiyoriy ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va $\omega'(0)=\omega''(0)=0$ shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya. Bir jinsli bo'lgan masala nolmas yechimga ega bo'lganligi uchun uning yechimi cheksiz ko'p bo'ladi. Demak, masala korrekt qo'yilmagan.

Matematik fizika masalasi shartli korrekt qo'yilgan yoki A.N. Tixonov ma'nosida korrekt qo'yilgan deb aytiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1. Tajribadan ma'lumki, qo'yilgan masalaning yechimi mavjud va u yechim biror funksional fazoning to'plam ostisi M ga tegishli.
2. Masalaning yechimi M to'plamda yagona.
3. M ga karashli yechim masalaning berilganlariga uzluksiz ravishda bog'liq, ya'ni masala berilganlarining yechimni M dan tashqariga chiqarmaydigan cheksiz kichik variatsiyasiga yechimni M dagi cheksiz kichik variasiyasi mos kelsa.

Korrektlikning klassik ta'rifi va A.N. Tixonov ma'nosidagi ta'rifi orasidagi farqni qarash muhimdir. Korrektlikning klassik ta'rifida yechimning mavjudligi isbotlanadi. Keyingi ta'rifda yechimning mavjudligi tajribadan kelib chiqadi. Yechimning yagonaligi esa xar ikkala holda bir xildir, ya'ni yagonalik teoremasini isbotlash orqali beriladi. Yechimning turg'unligi esa xar ikkala ta'rifda ham isbotlanadi.

Tixonov teoremasi

Tixonov regulyarizatsiyasining asosiy nazariy kafolati quyidagi teoremada bayon etiladi:

Teorema (Tixonov):

Agar:

$y^{\delta}\to y\ (ya'ni\ \delta\to 0)$,

regulyarizatsiya parametr: $\alpha=\alpha(\delta)\to 0$,

va $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)}=0$,

unda Tixonov regulyarizatsiyasi yechimi quyidagicha yaqinlashadi:

$$\lim_{\delta\to 0}\|x_{\alpha}^{\delta}-x\|=0.$$

Ya'ni, Tixonov usuli yordamida topilgan yechim asl yechimga **barqaror** tarzda yaqinlashadi.

L-korrektlik tushunchasi

Korrektlik (Y. Hadamard ta’rifiga ko‘ra)

Masala (A,X,Y) quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, u **korrekt (ya’ni yaxshi qo‘yilgan)** deb ataladi**:**

1. **Yechimning mavjudligi:** Har bir kirish ma’lumot uchun yechim mavjud bo‘lsin.
2. **Yechimning yagona bo‘lishi:** Yechim yagona bo‘lsin.
3. **Barqarorlik:** Yechim kirish ma’lumotlar kichik o‘zgarishlariga barqaror bo‘lsin.

L-korrektlik

L-korrektlik — masalaning aniq normali, funksionallik maydonlarida yoki operator sifatida **Linear (L)** (ya’ni chiziqli) va **korrekt** bo‘lishini anglatadi. Ya’ni:

- Operator L:X→Y chiziqli va
- Masala $Lf = y$ yuqoridagi Hadamard shartlariga bo’ysunadi.

Shuningdek, L-korrekt masalalarda L operatorining teskari operatori L^{-1} mavjud va u barqaror (ya’ni, cheklangan) operator bo‘ladi.

Xulosa

Matematik fizika va amaliy modellashtirish sohalarida teskari va nokorrekt masalalar muhim o‘rin tutadi. A.N. Tixonov tomonidan kiritilgan regulyarizatsiya usuli bu kabi masalalarning barqaror yechimlarini ta’minlashga xizmat qiladi. Tixonov teoremasi ushbu usulning nazariy asosini tashkil etadi va regulyarizatsiyalangan yechimlarning haqiqiy yechimga yaqinlashishini kafolatlaydi. L-korrektlik tushunchasi esa masalaning chiziqliligi va barqarorligiga asoslanadi hamda Hadamard shartlari asosida baholanadi. Misollar orqali ko‘rsatildiki, hatto klassik tenglamalar ham noto‘g‘ri qo‘yilgan holatlarda cheksiz ko‘p yoki mavjud bo‘lmagan yechimlarga olib kelishi mumkin. Shuning uchun, teskari masalalarni tahlil qilishda regulyarizatsiya va korrektlik nazariyasi markaziy ahamiyat kasb etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Дурдиев Д.К. Обратные задачи для сред с последствием. Дис. док. физ-мат. Наука. 2019. 245 с.

2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск.: Сибирское научное издетелство, 2019. – 457 с.

3. Прилепко А.И. Об обратных задачах теории потенциала. //Дифференциальные уравнения. 2017. Т.3. С. 30-44.

4. Хайдаров А. Один класс обратных задач для эллиптических уравнений. //Докл. АН СССР, 2014. Т. 277. №6. С. 1335 – 1337.

5. Хайдаров А., Шодиев Д.С. О единственности решения обратных задач для дифференциальных уравнений второго порядка. Узб. мат. журнал. 2012. 76-78 стр.