KO‘P O‘LCHOVLI MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI UCHUN NOKORREKT CHEGARAVIY MASALANI REGULYARLASHTIRISH

Ismoilova Mohinurbonu Is'hoqjon qizi
Farg'ona Davlat Unversiteti 3-kurs talabasi
is.hoqjonovna2004@gmail.com
Mirzarahimova Roziyaxon Ibrohimjon qizi
Farg'ona Davlat Unversiteti 3-kurs talabasi
rahmatovmuhammadiso33@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada ko'p o'lchovli matematik fizika tenglamalari uchun yuzaga keladigan nokorrekt (yaxshi aniqlanmagan) chegaraviy masalalarni regulyarlashtirish usullari tahlil qilinadi. Nokorrekt masalalar nazariyasi, ayniqsa, fizikada teskari masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega. Maqolada Tixonov regulyarlashtirish usuli, spektral metodlar, stabilizatsiya funksiyalari va funksional minimallashtirish asosida yechim olish yondashuvlari ko'rib chiqiladi.*

Kalit so'zlar: *nokorrekt masala, regulyarlashtirish, Tixonov usuli, matematik fizika, elliptik tenglamalar, Chebyshev normasi, ill-posed problems.*

Аннотация: *В статье анализируются методы регуляризации для возникших некорректных (слабо сформулированных) краевых задач, касающихся многомерных математических физики. Теория некорректных задач имеет особую значимость, особенно при решении обратных задач в физике. В статье рассматриваются подходы получения решения на основе метода Тихонова, спектральных методов, функций стабилизации и функциональной минимизации.*

Ключевые слова: *некорректная задача, регуляризация, метод Тихонова, математическая физика, эллиптические уравнения, норма Чебышёва, ill-posed problems.*

Annotation: *This article analyzes the regularization methods for boundary problems that arise in multi-dimensional mathematical physics equations that are ill-posed (badly defined). The theory of ill-posed problems is particularly significant in solving inverse problems in physics. The article discusses approaches for obtaining solutions based on Tikhonov regularization method, spectral methods, stabilization functions, and functional minimization.*

Keywords: *ill-posed problems, regularization, Tikhonov method, mathematical physics, elliptic equations, Chebyshev norm.*

Kirish

Matematik fizika tenglamalari ko‘plab tabiiy jarayonlar va fizik hodisalarni ifodalashda muhim rol o‘ynaydi. Ko‘p o‘lchovli holatlarda bu tenglamalar odatda elliptik, giperbolik yoki parabolik turdagi tenglamalar ko‘rinishida uchraydi. Ayrim hollarda masalalar to‘g‘ri (korrekt) bo‘lmaydi, ya’ni quyidagi xususiyatlardan biri buziladi:

Yechim mavjudligi

Yechimning yagonaligi

Berilgan ma’lumotlarga uzluksiz bog‘liqligi

Bunday masalalar *nokorrekt masalalar* (ill-posed problems) deb ataladi. Ularni yechish uchun alohida yondashuvlar – *regulyarlashtirish usullari* – qo‘llaniladi. Bu maqola ana shu yondashuvlarga bag‘ishlanadi.

Nokorrekt masalaning umumiy ko‘rinishi

Ko‘p o‘lchovli matematik fizika tenglamalarida quyidagi umumiy masala ko‘riladi:

$Lu = f$ ko‘p o‘lchovli sohada $\Omega \subset R^n$ Bu= g chegara $\partial\Omega$ da

bu yerda:

- L — differensial operator (masalan, Laplas operatori),
- B — chegaraviy shartlarni ifodalovchi operator,
- f, g — berilgan funksiyalar,
- u — izlanayotgan yechim.

Agar bu masala yechimning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi (stabilnost) bo‘yicha shubhali bo‘lsa, u nokorrekt hisoblanadi.

Regulyarlashtirish nazariyasining asoslari

Regulyarlashtirish — bu nokorrekt masalani korrekt masalaga aylantirishga qaratilgan usullar majmuasidir. Asosiy g‘oya: haqiqiy (ideal) ma’lumotlar mavjud bo‘lmaganda, shovqinli yoki yaqin taxminli ma’lumotlar asosida barqaror yaqin yechim topish.

Tixonov regulyarlashtirish usuli

Tixonov usulida yechim quyidagi funktsionalni minimallashtirish orqali aniqlanadi:

$$J(u) = \| Lu - f_\delta \|^2 + \alpha \| Ru \|^2 \to min$$

bu yerda:

- f_δ — shovqinli ma’lumot $\| f - f_\delta \| \le \delta$
- R — regulyarlashtiruvchi operator (odatda I yoki ∇),
- $\alpha > 0$ — regulyarlashtiruvchi parametr.

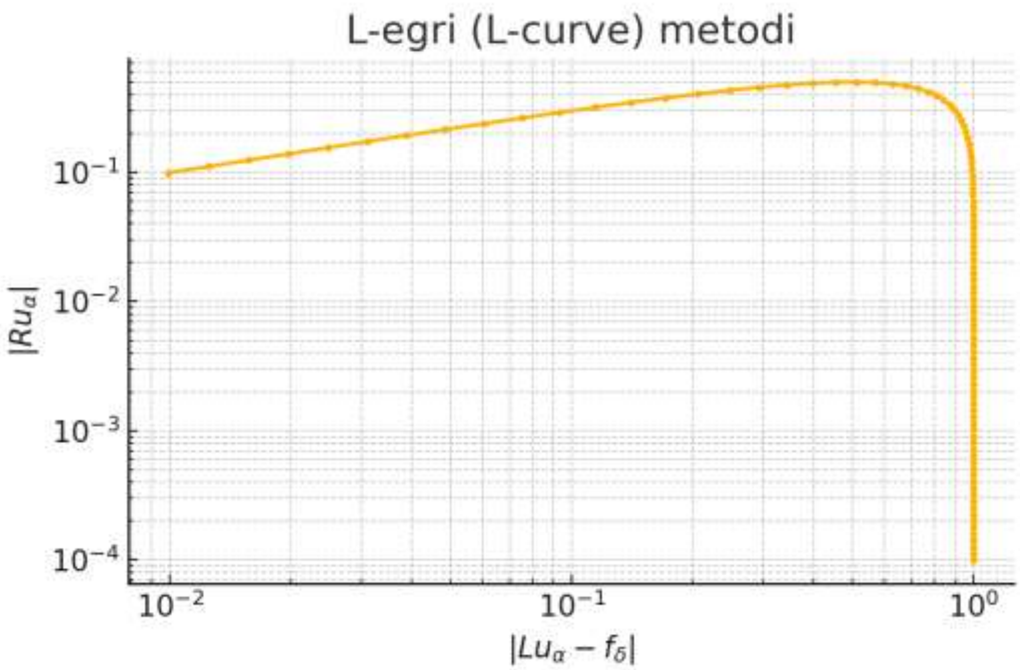
Yechim mavjudligi:

$$(L * L + \alpha R * R) u_\alpha = L * f_\delta$$

Bu tenglama mustahkam va silliqlashtirilgan yechim beradi.

L-egri (L-curve) grafikasi:

Quyidagi grafik Tixonov regulyarlashtirishida optimal parametr tanlash uchun ishlatiladigan L-egri metodini ko‘rsatadi.



Parametr tanlash

Regulyarlashtiruvchi parametr α tanlanishi yechim sifati uchun muhim. Mashhur tanlash qoidalari:

Discrepancy principle (Morozov mezoni):

$\| Lu_\alpha - f_\delta \| = \delta$

L-kritik burchak usuli (L-curve method)

Ko'p o'lchovli hol uchun misollar

Laplas tenglamasi uchun obrat masala

Berilgan shart:

$$\Delta u(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \Omega \subset R^3$$

$$u|_{z=0} = \phi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} = \psi(x, y)$$

Agar ϕ va ψ shovqinli bo'lsa, masala nokorrekt bo'ladi. Tixonov usuli orqali barqaror yechim olinadi:

$$J(u) = \| \Delta u \|^2_{L^2} + \alpha \| u \|^2_{H^{-1}}$$

Issiqlik tenglamasi uchun teskari vaqt masalasi

$$ut - \Delta u = 0, u(x, T) = g(x)$$

Yechimni $t = 0$ da topish kerak. Bu masala klassik teskari vaqt masalasi bo'lib, kuchli nokorrektlik bilan tavsiflanadi. Regulyarlashtirish usuli bu yerda ham qo'llaniladi.

Spektral regulyarlashtirish usuli

Agar operator L o'z-o'ziga qo'shma va ijobiy aniqlangan bo'lsa, u holda:

$$Lu = f \Rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (f, \phi_n) \phi_n$$

Agar f shovqinli bo‘lsa, yuqori chastotali spektral komponentlar sezilarli darajada buziladi. Regulyarlashtirish uchun quyidagicha cheklash kiritiladi:

$$u_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \alpha}(f_\delta, \phi_n)\phi_n$$

Stabilizatsiya funksiyalari usuli

Bu usulda yechim quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi:

$$u_\alpha = G_\alpha(L) f_\delta$$

bu yerda G_α — stabilizator operatori. Har xil stabilizatorlar:

Tixonov: $G_\alpha(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda + \alpha}$

Landveber: iteratsion yondashuv asosida

Quyruq funktsiyalari: silliqlashtirish uchun

Xulosa

Nokorrekt masalalar matematik fizika va teskari muammolarda keng uchraydi. Ularni to‘g‘ridan-to‘g‘ri yechish mumkin emas, lekin regulyarlashtirish usullari yordamida barqaror va fizik ma’noga ega yechimlar olinadi. Tixonov usuli, spektral yondashuvlar va funksional minimallashtirish metodlari amaliyotda eng samarali hisoblanadi.

Kelgusida regulyarlashtirish parametrlarini avtomatik tanlash, sun’iy intellekt asosida yechimlar sifati monitoringi kabi yo‘nalishlar istiqbolli hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solutions of Ill-posed Problems. Winston and Sons, 1977.
2. Lavrent’ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. American Mathematical Society, 1986.
3. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. Kluwer Academic Publishers, 1996.
4. Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Springer, 2011.
5. Bertero M., Boccacci P. Introduction to Inverse Problems in Imaging. Institute of Physics Publishing, 1998.
6. Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O. Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-posed Problems. De Gruyter, 2008.
7. Tautenhahn U. Optimality for ill-posed problems under general source conditions. Numerische Mathematik, 1996.
8. Groetsch C.W. The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind. Pitman, 1984.