SHARTLI KORREKTLIK VA UNGA OID ASOSIY NAZARIY QARASHLAR

Raimova Shohida Ravshanbek qizi
Farg'ona davlat universiteti talabasi
E-mail :raimovashohida2@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada matematik analiz va teskari masalalar nazariyasida muhim tushuncha bo'lgan shartli korrektlik yoritiladi. Shartli korrekt masalalar, ularning mavjudlik va barqarorlik xossalari, Tixonov regularizatsiyasi, L-korrektlik tushunchasi hamda shartli korrektlikning fizik talqini muhokama qilinadi. Maqola teskari masalalarni yechishda barqaror va fizik mazmunga ega yechimlar topish muammosiga qaratilgan.*

Kalit so'zlar: *Shartli korrekt masalalar, ularning mavjudlik va barqarorlik xossalari, Tixonov regularizatsiyasi.*

Аннотация: *В статье рассматривается условная корректность — важное понятие в математическом анализе и теории обратных задач. Обсуждаются условно корректные задачи, их существование и свойства устойчивости, регуляризация Тихонова, понятие L-корректности и физическая интерпретация условной корректности. В статье рассматривается проблема поиска устойчивых и физически осмысленных решений обратных задач.*

Ключевые слова: *Обсуждаются условно корректные задачи, их существование и свойства устойчивости, регуляризация Тихонова*

Annotation: *This article discusses conditional correctness, an important concept in mathematical analysis and the theory of inverse problems. Conditionally correct problems, their existence and stability properties, Tikhonov regularization, the concept of L-correctness, and the physical interpretation of conditional correctness are discussed. The article focuses on the problem of finding stable and physically meaningful solutions to inverse problems.*

Keywords: *Conditionally correct problems, their existence and stability properties, Tikhonov regularization.*

Kirish. Ko'plab fizikaviy, texnik va geofizik muammolar amalda teskari masalalar shaklida ifodalanadi. Teskari masalaning asosiy xususiyati shundaki, ularning yechimlari har doim ham mavjud, yagona yoki barqaror bo'lmasligi mumkin. Ya'ni, klassik ma'nodagi korrekt masala shartlari (Hadamard shartlari) buziladi. Bu holatlarda masalani shartli korrektlash kerak bo'ladi. Shartli korrektlik – bu teskari masalalarning barqaror yechimini ta'minlash uchun kiritilgan nazariy yondashuvdir.

Shartli korrektlik tushunchasi

Fransuz matematikasi J. Hadamard klassik korrektlik uchun quyidagi uchta shartni ilgari surgan:

1. Yechim mavjudligi;
2. Yechimning yagonaligi;
3. Yechimning berilgan ma’lumotlarga nisbatan uzluksiz bog‘liqligi (barqarorlik).

Aksariyat teskari masalalarda bu shartlar bajarilmaydi. Bunday hollarda, berilgan masalani maxsus cheklovlar (ya’ni aprioriy ma’lumotlar) asosida yechish orqali barqaror yechim olishga harakat qilinadi. Bu yondashuv shartli korrektlik deb ataladi.

Shartli korrektlikning rasmiy ta’rifi

Faraz qilaylik, A:X$\rightarrow Y$ – Banach fazolarda aniqlangan chiziqli operator bo‘lsin, va quyidagi operator tenglama qaralsin:

$Ax = y,$

bu yerda x $\in X$,y $\in Y$, va A– teskari muammo yaratuvchi operator. Masala shartli korrekt deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1. Yechim oldindan belgilangan M $\subset X$ to‘plamda izlanadi (ya'ni, aprioriy cheklovlar mavjud);
2. Har qanday shovqinli o‘lchovlar uchun $y^{\delta} \in Y$ mavjud bo‘lib,$|y-y^{\delta}| \leq \delta$;
3. Yechim x^{δ} mavjud bo‘lib, $x^{\delta} \rightarrow x \;\; \delta \rightarrow 0$ da.

Bunday yondashuv masalani barqarorlashtirish imkonini beradi va shovqinli ma’lumotlardan real yechim olishga olib keladi.

Tixonov regularizatsiyasi va Tixonov teoremasi

Shartli korrekt masalalarni yechishning mashhur usullaridan biri – Tixonov regularizatsiyasi usulidir. Bu usulda asosiy operator tenglama quyidagicha modifikatsiyalanadi:

$x_{\alpha}^{\delta} = \arg min_{x \in X} (\|Ax - y^{\delta}\|^2 + \alpha\|Lx\|^2),$

bu yerda:

•y^{δ}– shovqinli o‘lchov;

• $\alpha > 0$– regularizatsiya parametri;

• L– oldindan belgilangan cheklovchi operator.

Tixonov teoremasi shuni ko‘rsatadiki, agar$\alpha = \alpha(\delta) \rightarrow 0$ va $\delta \rightarrow 0$ da to‘g‘ri tanlansa, unda $x_{\alpha}^{\delta} \rightarrow x$. Bu degani, Tixonov funksionalining minimali asosiy tenglamaning barqaror yechimini beradi.

L-korrektlik tushunchasi

Tixonov regularizatsiyasida ishlatiladigan L operatori shartli korrektlikda muhim rol o‘ynaydi. Bu operator:

• L=I bo‘lsa – **zerolik cheklovi:** yechim normasi kichik bo‘lishi kerak;

• L=D (masalan, hosila) bo‘lsa – **silliqlik cheklovi:** yechim o‘zgaruvchan emas, silliq bo‘lishi kerak;

• L maxsus fizikaviy yoki statistik modellarga asoslangan operator bo‘lishi mumkin.

Shunday qilib**, L-korrektlik** deganda yechimga qo‘yilgan oldindan berilgan struktura yoki fizik mazmundagi cheklovlar orqali yechimni barqarorlashtirish tushuniladi.

Shartli korrektlikning fizik mazmuni

Teskari masalalar ko‘plab amaliy sohalarda, jumladan:

- **tomografiya** (meditsina, sanoat),
- **issiqlik oqimlari** (energetika),
- **akustik va elektromagnit sinovlar** (nazorat va diagnostika),
- **geofizika** (yerosti qatlamlarini aniqlash)

kabi sohalarda keng qo‘llaniladi. Bu sohalarda ma’lumotlar har doim shovqinli, noaniq yoki yetarli emas.

Shuning uchun, **shartli korrektlikning fizik mazmuni shundaki**:

- amaliy o‘lchovlardan real fizik hodisalarni aks ettiruvchi yechim olish mumkin;
- shartli korrektlik metodlari orqali barqaror, fizik mazmunga ega, izchil yechimlar olinadi;
- bu usullar matematik model va amaliy o‘lchovlar o‘rtasidagi tafovutni kamaytiradi.

Misol: Integrallash orqali teskari masala

Faraz qilaylik, bizda quyidagi integral tenglama mavjud (bu teskari masala bo‘ladi):

$(Ax)(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt = y(s), \quad 0\leq s \leq 1,$

bu yerda:

- $K(s,t) = \min\,(s,t)$ – yadrosi ma’lum bo‘lgan integral operator;
- $x(t)$ – noma’lum funksiyani topish kerak (teskari masala);
- $y(s)$ – o‘lchov ma’lumotlari (lekin ular shovqinli).

Integral operator A uzluksiz va kompakt bo‘lganligi sababli bu teskari masala noto‘g‘ri qo‘yilgan bo‘ladi (ya'ni, kichik xatolik yechimda katta xatoga olib keladi).

1-bosqich: Teskari masalani shartli korrekt qilish (Tixonov usuli)

Tixonov regularizatsiyasi asosida quyidagi funksionalni minimallashtiramiz:

$J_\alpha(x)=\left\|Ax - y^\delta\right\|^2+\alpha\|x\|^2,$

bu yerda:

- y^δ– shovqinli o‘lchov: $\left|y - y^\delta\right| \leq \delta$,
  - $\alpha > 0$ – regularizatsiya parametri (masalani barqarorlashtiradi),
  - $|x|^2$ – yechimning normasi (ya'ni, silliqlik yoki cheklilik sharti).

2-bosqich: Sonli misol

Faraz qilaylik:

- Haqiqiy yechim: $x(t) = \sin \pi t$,
- Unda analytik hisoblash orqali:

$$y(s) = \int_0^1 \min\,(s,t) \sin \pi t \; dt,$$

Endi, faraz qilaylik, o‘lchovlarda xatolik bor:

- $y^{\delta}(s) = y(s) + shovqin$, masalan $shovqin = 0.05 \cdot randn(s)$,

Shu shovqinli y^{δ} asosida Tixonov funksionalini minimallashtiramiz.

Natija:

- Agar α = 0 bo‘lsa (ya’ni regularizatsiyasiz), yechim juda beqaror chiqadi;
- Agar α > 0 bo‘lsa, masala barqarorlashadi, yechim esa sin πt ga yaqinlashadi;
- Bu degani, shovqinli y^{δ} dan real $x(t)$ ni tiklash mumkin — bu shartli korrektlik natijasidir.

Xulosa (misol bo’yicha)

Integral operatorlar ko‘pincha noto‘g‘ri qo‘yilgan teskari masalalar hosil qiladi;

Shovqinli ma’lumotdan bevosita yechim olish barqaror emas;

Tixonov regularizatsiyasi yordamida shartli korrekt yechim olinadi.

Xulosa: Shartli korrektlik va Tixonov regularizatsiyasi teskari masalalarning barqaror yechimini ta’minlovchi zamonaviy matematik yondashuvlardandir. Ushbu usullar real fizik muammolarda noaniqliklarni yengish, ishonchli va fizik jihatdan asoslangan yechimlar olish imkonini beradi. L-korrektlik orqali esa aprioriy ma’lumotlar hisobga olinadi va natijaning sifatini oshirishga xizmat qiladi. Bu yondashuvlar nazariy hamda amaliy tadqiqotlar uchun muhim asos bo‘lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Tikhonov A. N., Arsenin V. Y. Solutions of Ill-Posed Problems. Winston & Sons, 1977.
2. Engl H. W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. Kluwer Academic Publishers, 1996.
3. Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Springer, 2011.
4. Lavrent’ev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P. Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. American Mathematical Society, 1986.
5. Bertero M., Boccacci P. Introduction to Inverse Problems in Imaging. Institute of Physics Publishing, 1998.

Bu maqolani Farg’ona Davlat Universiteti talabasi Raimova Shohida mustaqil ish sifatida tayyorladi.