

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФУЗИОННЫХ ЗАДАЧ

Тожиев Тохир Халимович,

Ферганский государственный университет, доцент

The paper presents a stochastic approximation for the generalized nonisotropic diffusion equation.

В работе изложены методы приближения функционалов от диффузий и от оптимально управляемого диффузионного процесса, а также методы приближения диффузионных процессов, являющихся решениями стохастических дифференциальных уравнений Ито как управляемых, так и неуправляемых. Поскольку многие из функционалов, которые мы будем вычислять и приближать, в действительности являются слабыми решениями дифференциальных уравнений в частных производных (слабое решение может быть представлено как некоторый функционал от подходящего диффузионного процесса), то методы приближения слабых решений тесно связаны с методами приближений диффузионных процессов и функционалов от них. Кроме того, внешний вид дифференциальных уравнений в частных производных, которым, по крайней мере формально, удовлетворяют интересующие нас функционалы, подсказывает нам численные методы решения этих задач.

Пусть G -ограниченная область в \mathbf{R}^n , $Q = G * [T_0, T_1]$ – цилиндр в R^{n+1} . Обозначим $\Gamma = Q \setminus Q$. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения параболического типа;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(t,x) \frac{\partial u}{\partial x^i} + c(t,x)u + g(t,x)u = 0. \quad (1.1)$$

$$(t,x) \in Q, \quad u|_{\Gamma} = \varphi(t,x) \quad (1.2)$$

Предполагается, что коэффициенты удовлетворяют условию, строгой эллиптичности в \bar{Q} . Кроме того будем считать, что выполняются условия, обеспечивающие достаточную гладкость решения задачи (1.1) вплоть до границы.

Решение задачи (1.1) допускает вероятностное представление

$$u(t,x) = E \left[\varphi(\tau, X_{t,x}(\tau)) Y_{t,z,1}(\tau) + Z_{t,x,1,0}(\tau) \right], \quad (1.3)$$

где $X_{t,x}(S)$, $Y_{t,x,y}(S)$, $Z_{t,x,y,z}(S)$, $S \geq t$, - решение задачи Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dX &= b(s, X) ds + \sigma(s, X) d\omega(s), \quad X(t) = x, \\ dY &= c(s, X) Y ds, \quad Y(t) = y, \quad dZ = g(s, X) Y ds, \quad Z(t) = z, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$(t,x) \in Q$, τ - момент выхода траектории $(s, X_{t,x}(s))$ на границу Γ .



В $\omega(a) = (\omega^1(a)), \dots, (\omega^n(a))^T$ - стандартный Винеровский процесс, Y и Z -скаляры $b(s,x)$ - n - мерный вектор-столбец, составленный из коэффициентов $b^i(s,x)$, $n \times n$ - матрица $\sigma(s,x)$ получается из представления $\sigma(s,x)\sigma^T(s,x) = a(s,x), a(s,x) = \{a^{ij}(s,x)\}, i, j = \overline{1, n}$ Для реализации представления (1.3) понадобится приближенное построение траектории $(s, X(s))$.

Известно что, решение общей задачи Дирихле известным образом связано с системой стохастических дифференциальных уравнений. Используя некоторые аппроксимационные методы можно построить Марковскую цепь с поглощением, которая аппроксимирует решения этой системы так, что математическое ожидание определенного функционала от траекторий цепи близко к решению краевых задач для линейного параболического и эллиптического уравнений второго порядка. Если используется вероятностное представление задачи Коши то возможно построить прямые аппроксимации для решения задачи Коши, которые основаны на построенном аппроксимационном методе. Однако, если мы хотим аппроксимировать похожим способом решения параболического или эллиптического уравнения в ограниченной области, тогда необходимо иметь аппроксимацию времени первого выхода диффузии через границы области.

Пусть $w(\bullet)$ r -мерный стандартный Винеровский процесс, причем $B_t = B(w(s), s \leq t)$. Не упреждающие (относительно $w(\square)$) решения уравнения

$$X(t) = x + \int f(X(s), s) ds + \int \sigma(X(s), s) dw(s) \quad (1.5)$$


Определяют большой класс Марковских процессов. Уравнение (1.5) часто записывают в символической дифференциальной форме

$$dx = f(x, s)gs + \sigma(x, s)dw(s)$$

Такие процессы широко используются в стохастической теории управления и других приложениях в технике, физике и экономике, и описывают множество практически полезных процессов. Функционалы от этих, процессов, являются решениями эллиптических, параболических уравнений в частных производных и поэтому изучение свойств таких процессов дает много полезной информации о свойствах дифференциальных уравнений в частных производных. В самом, деле соотношения между процессом (1.5) и дифференциальными в частных производных будут часто использоваться при изучении аппроксимаций процесса и дифференциальных уравнений.

Методы вычислений, которыми мы будем пользоваться, тождественны методам вычислений функционалов от конечных Марковских цепей. Марковские процессы диффузионных мы будем получать, грубо говоря, следующим образом. Возьмем дифференциальное уравнение в частных производных, которому, по крайней мере формально, удовлетворяет функционал от диффузионного процесса, и напишем соответствующее ему уравнение в конечных разностях. Если приближения выбраны







аккуратно (но абсолютно естественным способом), то уравнение в конечных разностях в действительности окажется уравнением для функционала от некоторой Марковской цепи, а ее переходные вероятности будут коэффициентами конечноразностного уравнения.

При исследовании на компьютерных технологиях динамических систем часто используется метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Применение этого метода для исследования систем, заданных стохастическими дифференциальными уравнениями, требует их замены разностными схемами Эйлера и Рунге-Кутты. Такие замены рассматриваются в работах. Однако известные оценки погрешности разностных методов решения детерминированных уравнений не могут быть использованы при цифровом моделировании стохастических уравнений ввиду недифференцируемости почти во всех их решениях. В работе для оценки погрешностей получен стохастический аналог ряда Тейлора, позволяющий разложить решение стохастического дифференциального уравнения в ряд по нелинейным функционалам от Винеровского процесса.

Основное внимание в работах по численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений уделяется аппроксимации решений в среднеквадратическом смысле. Между тем, в случаях, когда моделирование решений предназначено для применения методов Монте-Карло, совсем необязательно решать весьма сложную задачу отыскания среднеквадратичных приближений. Если $X(t)$ - точно решение, а $\bar{X}(t)$ - приближенное решение, то для многих задач математической физики нужно лишь, чтобы математическое ожидание $Ef(\bar{X}(t))$ было близко к $Ef(X(t))$, т.е. чтобы $\bar{X}(t)$ было близко к $X(t)$ в слабом смысле.



Конечно, при [1] численном интегрировании в среднеквадратичном смысле с некоторым порядком точности, получаются с тем же порядком точности приближения в слабом смысле. Так как если $E(|\bar{X}(t) - X(t)|^2)^{1/2} = O(h^p)$, то для любой функции f , удовлетворяющей условию Липшица, выполняется равенство $E(f(\bar{X}(t)) - f(X(t))) = O(h^p)$, однако, как это показано в моделирующей разности $\Delta_k w(h) = w(t_k + h) - w(t_k)$ (и даже с помощью моделирования более простых случайных величин), можно построить метод второго порядка точности в слабом смысле. В то время как в среднеквадратичном смысле этим способом нельзя построить метод выше первого порядка точности. Но даже не это является главным обстоятельством, стимулирующим развитие методов построения слабых приближений. Известно, что уже в среднеквадратических системах с несколькими шумами возникает непростая задача моделирования случайных величин вида $\int_0^h w_i(v) dw_j(v)$. Этой



проблем моделирования сложных случайных величин удастся избежать при интегрировании в слабом смысле.

Если иметь в виду приложения метода Монте-Карло, проявляющих свою эффективность в многомерных задачах, то весьма актуальным является развитие методов численного интегрирования в слабом смысле как раз для систем со многими шумами.

Литература

1. Тожиев Т., Ибрагимов Ш., Рахимов К. О современных методах моделирования. Научно-технический журнал ФерПИ. №1. 2018, 119 с.
2. Тожиев Т., Ибрагимов Ш., Юсупалиев Д. Метод Монте-Карло для решения краевой задачи диффузионного уравнения. Научно-технический журнал ФерПИ. №4. 2017, 24 с.
3. Купцов Л. П. О свойстве среднего для обобщенного уравнение А.Н. Колмогорова I // Дифф. уравнение 1983, т. XIX, № 2.
4. Мамажонов, М., Шерматова, Х. М., & Мукаддасов, Х. (2014). Постановка и метод решения некоторых краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка парабола-гиперболического типа. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, (1 (8)), 7-13.
5. Mamajonov, M., & Mamajonov, S. M. (2014). Statement and research method some boundary value problems for a class of fourth order parabolic-hyperbolic type. *Vestnik KRAUNC. Fiziko-Matematicheskije Nauki*, (1), 14-19.