DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI SONLI YECHISH: EYLER VA RUNGE-KUTTA METODLARI SOLISHTIRUVLI TAHLIL

Ismoilov Axrorjon Ikromjonovich
Farg'ona davlat universiteti katta o'qituvchisi
ismoilovaxrorjon@yandex.com
Karimova Nargizaxon Abdurasul qizi
Farg'ona Davlat Unversiteti 2-kurs talabasi
nargizaxon592@gmail.com
Farg'ona Davlat Unversiteti 2-kurs talabasi
Nu'monova Malikaxon Abduxakim qizi
numonovamalika38@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada oddiy differensial tenglamalarni sonli yechishning ikki asosiy usuli — Eyler va Runge-Kutta (4-daraja) usullari o'rganiladi. Har ikki metodga amaliy misol keltiriladi, ularning xatoligi aniq yechim bilan solishtiriladi va C# dasturlash tilida yaratilgan grafik interfeysli ilova orqali ularning farqlari ko'rsatib beriladi.*

Kalit so'zlar: *Differensial tenglama, Eyler usuli, Runge-Kutta usuli, sonli usullar, C# dasturlash, grafik tahlil, xatolik solishtiruvi*

Аннотация. *В данной статье рассматриваются два основных численных метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений — метод Эйлера и метод Рунге-Кутта четвертого порядка. Приводится практический пример, проводится сравнение с точным решением, а также демонстрируются различия между методами с помощью графического интерфейса, реализованного на языке программирования C#.*

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение, метод Эйлера, метод Рунге-Кутта, численные методы, программирование на C#, графический анализ, сравнение ошибок*

Abstract. *This article explores two fundamental numerical methods for solving ordinary differential equations: the Euler method and the fourth-order Runge-Kutta method. A practical example is provided, accuracy is evaluated by comparing with the exact solution, and differences between the methods are visualized using a graphical interface developed in C#.*

Keywords: *Differential equation, Eyler method, Runge-Kutta method, numerical methods, C# programming, graphical analysis, error comparison*

Kirish

Differensial tenglamalar zamonaviy fan va texnikaning turli sohalarida — xususan, fizika, texnika, biologiya, iqtisodiyot, ekologiya, avtomatika va boshqalarda keng qo‘llaniladi. Ular vaqt, masofa, tezlik, harorat, populyatsiya, bosim kabi o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi bog‘lanishni ifodalovchi matematik model sifatida xizmat qiladi. Ko‘pchilik real hayotda uchraydigan jarayonlar va tizimlar differensial tenglamalar orqali modellashtiriladi.

Ko‘pincha bunday tenglamalarning **analitik yechimi mavjud emas** yoki mavjud bo‘lsa ham uni olish **murakkab va uzoq jarayonni talab qiladi**. Ayniqsa, chiziqli bo‘lmagan, o‘zgaruvchilar bog‘lanishi murakkab bo‘lgan differensial tenglamalarni qo‘lda yechish amaliyotda deyarli mumkin emas. Shuning uchun **sonli usullar** yordamida bu tenglamalarning **yaqin yechimlarini** hisoblash zarurati tug‘iladi.

Sonli yechimlar — bu tenglama yechimini uzluksiz funksiya sifatida emas, balki **ma’lum oraliqda, tanlangan nuqtalar uchun hisoblangan qiymatlar ketma-ketligi** sifatida olishga imkon beradi. Bunda funksiya qiymatlari **boshlang‘ich shart asosida** va **qadamli harakat** yordamida hisoblanadi. Bu jarayon algoritmlashtirish va kompyuter orqali hisoblashga qulaydir.

Sonli yechim olishda eng ko‘p uchraydigan va o‘quv amaliyotida keng o‘rganiladigan usullar — **Eyler usuli** va **Runge-Kutta usullari** hisoblanadi. Eyler usuli soddaligi va tushunarli formulasi bilan ajralib turadi, ammo uning aniqligi past va xatolik tez ortib boradi. Aksincha, to‘rtinchi darajali Runge-Kutta usuli nisbatan murakkabroq bo‘lsa-da, **aniqligi yuqori**, barqaror va amaliyotda keng qo‘llaniladi.

Mazkur maqolada ushbu ikki sonli usulning nazariy asoslari, ishlash algoritmlari, afzallik va kamchiliklari batafsil tahlil qilinadi. Shuningdek, $y' = x + y$, $y(0) = 1$ ko‘rinishidagi oddiy differensial tenglama misolida har ikkala metod qo‘llanadi va **aniq yechim bilan solishtirilib**, ularning **xatolik darajalari taqqoslanadi**.

Amaliy jihatdan esa, C# dasturlash tilida ishlab chiqilgan grafik interfeysli dastur orqali foydalanuvchiga parametrlar (x_0, y_0, h, n) ni kiritish, yechimlarni vizual grafik ko‘rinishida tahlil qilish, natijalarni CSV faylga eksport qilish imkoniyati yaratilgan. Bu yondashuv nafaqat nazariy tahlil, balki **ko‘rgazmali taqdimot va tajriba asosida o‘rganishni** ta'minlaydi.

Nazariy qismi

Differensial tenglamalarni yechishning sonli usullari matematik tahlil orqali yechimini olish mushkul bo‘lgan holatlarda keng qo‘llaniladi. Bu usullar yordamida funksiya qiymatlari ketma-ketlikda (diskret nuqtalarda) hisoblab boriladi. Quyida ikki mashhur usul — **Eyler usuli** va **Runge-Kutta usuli (4-daraja)** haqida nazariy ma’lumot beriladi.

1. Eyler usuli

Eyler usuli — differensial tenglamalarni sonli yechishdagi eng oddiy va intuitiv usullardan biri. U tayanch nuqtadan boshlab funksiya grafigini **to‘g‘ri chiziq segmentlari bilan yaqinlashtiradi**. Formulasi quyidagicha:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Bu yerda:

- h — qadam uzunligi
- f(x, y) — funksiyaning hosilasi (tenglama o‘zi),
- (x_n, y_n) — hozirgi nuqta,
- y_{n+1} — keyingi nuqtadagi yechim.

Eyler usuli oddiy, lekin **aniqligi past** va qadam katta bo‘lsa, xatolik tez ortib boradi. U birinchi tartibli aniqlikka ega, ya’ni **xatolik** O(h)ga teng.

2. Runge-Kutta usuli (to‘rtinchi daraja)

To‘rtinchi darajali Runge-Kutta (RK4) usuli — amaliyotda eng keng qo‘llaniladigan yuqori aniqlikdagi metodlardan biridir. Bu usulda hisoblash formulasi quyidagicha:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + h/2, y_n + (h/2)\cdot k_1)$$
$$k_3 = f(x_n + h/2, y_n + (h/2)\cdot k_2)$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h\cdot k_3)$$
$$y_{n+1} = y_n + (h/6)\cdot(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4)$$

Bu formulada to‘rtta oraliq qiymat (k_1–k_4) orqali keyingi nuqtadagi yechim hisoblanadi. Bu yondashuv aniqlikni sezilarli darajada oshiradi, ya’ni xatolik $O(h^4)$ bo‘ladi.

Metodlar taqqoslanishi:

Ko‘rsatkich	Eyler usuli	Runge-Kutta (4)
Aniqlik darajasi	O(h)	$O(h^4)$
Hisoblash tezligi	Juda tez	Nisbatan sekin
Barqarorlik	Past	Yuqori
Dasturda ishlatish	Oson	O‘rtacha murakkab
Amaliy qo‘llanishi	Ta'limiy maqsadlar	Ilmiy-amaliy tadqiqotlar

Eyler usuli **o‘quv jarayoni uchun soddaligi** bilan foydalidir, lekin **katta xatolik** tufayli ko‘p hollarda murakkab muammolarda qo‘llanilmaydi. Runge-Kutta usuli esa **kompyuterda aniqroq natijalar olish** uchun juda qulaydir.

Amaliy misol

Sonli usullarni amaliy jihatdan qo‘llashda ularning natijasini taqqoslash uchun oddiy differensial tenglama tanlanadi. Bu orqali Eyler va Runge-Kutta usullarining ishlash prinsipi va aniqligi vizual va raqamli tahlil qilinadi.

Masala:

Berilgan differensial tenglama:

$y' = y - x^2 + 1, \quad y(0) = 0.5$

Bu tenglama uchun boshlang‘ich shartlar aniq bo‘lib, oddiy sonli metodlar bilan yechish uchun qulay.

Aniqlangan yechim:

Berilgan tenglama chiziqli differensial tenglama bo‘lib, uning analitik (aniq) yechimi quyidagicha topiladi:

$y(x) = (x + 1)^2 - 0.5 * e^x$

Ushbu formula bizga Eyler va Runge-Kutta metodlari bilan topilgan sonli yechimlarning aniqligini baholash imkonini beradi.

Sonli hisoblash uchun parametrlar:

Amaliy hisoblashda quyidagi parametrlar tanlandi:

Boshlang‘ich nuqta: $x_0 = 0$
Boshlang‘ich qiymat: $y_0 = 0.5$
Qadam uzunligi: $h = 0.2$
Qadamlar soni: $n = 4$

Shunday qilib, x o‘qi bo‘yicha quyidagi nuqtalar hisoblanadi: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, ..., $x_4 = 0.8$

Dasturlash vositasi:

Hisob-kitoblar C# dasturlash tilida, Windows Forms asosida yaratilgan grafik ilova orqali amalga oshirilgan. Ilova foydalanuvchiga quyidagilarni taqdim etadi:

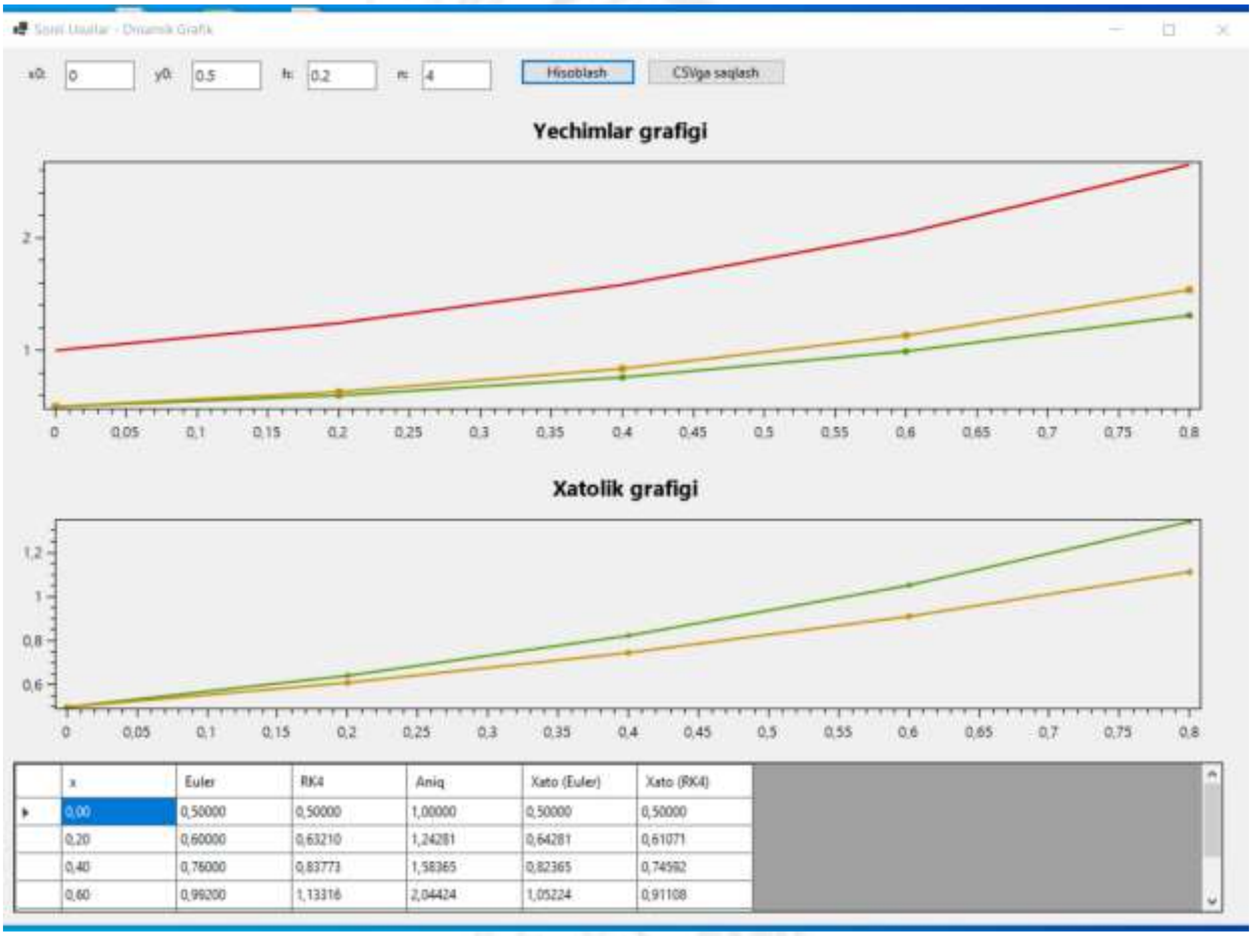
1. Kiritma oynalari orqali x_0, y_0, h, n parametrlarini belgilash.

2. Eyler, Runge-Kutta va aniq yechimlarning grafik ko‘rinishini chizish
3.Har bir nuqta uchun natijalarni jadvalga chiqarish
4. Jadvalni CSV fayl ko‘rinishida saqlash

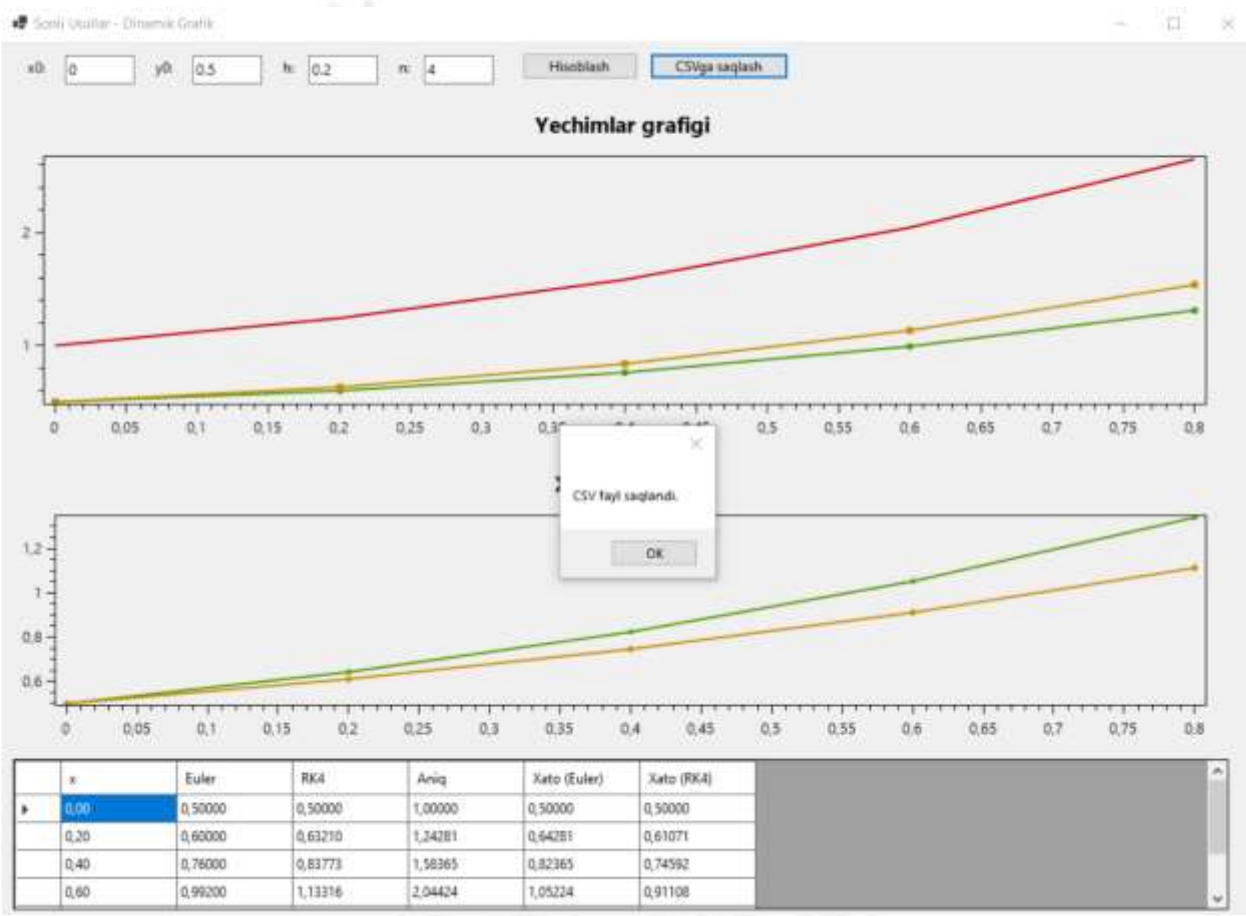
Ilova yordamida chizilgan grafikda:

1.Eyler usuli yechimining aniq yechimdan og‘ishi tez seziladi
2.Runge-Kutta 4-daraja esa aniq yechimga juda yaqin joylashadi
3.Har bir nuqta uchun xatolik qiymatlari hisoblab, alohida grafikda ko‘rsatiladi
4.Jadvalda esa har bir x_i nuqta uchun:

a) Eyler natijasi
b)Runge-Kutta natijasi
c)Aniqlangan yechim
d)Eyler va RK4 uchun xatolik miqdorlari alohida ustunlarda beriladi



	x	Euler	RK4	Aniq	Xato (Euler)	Xato (RK4)
▸	0,00	0,50000	0,50000	1,00000	0,50000	0,50000
	0,20	0,60000	0,63210	1,24281	0,64281	0,61071
	0,40	0,76000	0,83773	1,58365	0,82365	0,74592
	0,60	0,99200	1,13316	2,04424	1,05224	0,91108



	x	Euler	RK4	Aniq	Xato (Euler)	Xato (RK4)
▸	0,00	0,50000	0,50000	1,00000	0,50000	0,50000
	0,20	0,60000	0,63210	1,24281	0,64281	0,61071
	0,40	0,76000	0,83773	1,58365	0,82365	0,74592
	0,60	0,99200	1,13316	2,04424	1,05224	0,91108

Differensial tenglamalarni sonli usullar yordamida yechish, ayniqsa, analitik yechim mavjud bo‘lmagan hollarda, amaliy jihatdan juda katta ahamiyatga ega. Ushbu tadqiqotda Eyler va Runge-Kutta (4-darajali) usullarining ishlash printsipi, aniqligi va xatolik darajasi o‘rganildi.

Amaliy misol sifatida $y' = y - x^2 + 1$, $y(0) = 0.5$ tenglamasi tanlandi. Bu tenglama uchun analitik yechim mavjud bo‘lgani sababli, sonli usullar natijasi bilan aniq yechim taqqoslandi va bu orqali metodlarning aniqlik darajasi baholandi.

Natijalar tahlili:

- Eyler usuli soddaligi bilan ajralib turadi, ammo uning aniqligi past bo‘lib, natijalar aniq yechimdan tezda og‘ib ketadi. Bu metod odatda o‘quv maqsadlarida yoki dastlabki baholashlarda qo‘llaniladi.
- Runge-Kutta 4-daraja usuli yuqori aniqlikka ega bo‘lib, har bir oraliqda yechimni ancha aniq hisoblaydi. Amaliyotda aynan shu metod turli ilmiy hisob-kitoblar uchun tavsiya etiladi.
- Ilova orqali chizilgan grafiklar metodlar orasidagi tafovutni ko‘rgazmali tarzda ko‘rsatdi: RK4 chizig‘i aniq yechimga juda yaqin joylashgan bo‘lsa, Eyler yechimi sezilarli og‘ishga ega bo‘ldi.
- Har bir x_i nuqtada hisoblangan xatoliklar jadval orqali kuzatildi. Eyler usulining

xatolik darajasi qadamlar soni ortgani sari oshgani, RK4 usulida esa bunday holat kuzatilmagani aniqlandi.

- Dasturda foydalanuvchi uchun qulay interfeys yaratildi. Kiritma oynalari, grafik oynalar va CSVga eksport imkoniyati metodlarni amaliy tahlil qilishni osonlashtirdi.

Xulosa:

Sonli yechimlar real masalalarni modellashtirish va tahlil qilishda muhim vositadir. Eyler usuli tez va oddiy yechim bersa-da, aniqlik nuqtai nazaridan Runge-Kutta usulidan ancha ortda qoladi. Amaliy holatlarda, ayniqsa aniqlik talab qilinadigan joylarda, Runge-Kutta 4-darajali usuli afzal hisoblanadi.

Shu bilan birga, dasturiy ta'minot vositasida bu metodlarni grafik tarzda ko'rish va jadval bilan tahlil qilish o'quvchilar uchun ham nazariy, ham amaliy jihatdan katta foyda beradi. Ushbu yondashuv kelajakdagi ilmiy-tadqiqot yoki ta'limiy loyihalarda ham keng qo'llanilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Tursunov B.A., Mamatqulov U.T. Sonli usullar. – Toshkent: O'zbekiston milliy universiteti, 2019.
2. Kalitkin N.N. Chislennye metody. – M.: Nauka, 2012.
3. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. – Boston: Brooks/Cole, 2011.
4. Isaacs R. Differential Equations: A First Course. – Duxbury Press, 1994.
5. Karimov I.S. Differensial tenglamalar. – Toshkent: O'qituvchi, 2005.

Foydalanilgan internet saytlar

1. Microsoft Docs – C# rasmiy hujjatlari: https://learn.microsoft.com/en-us/dotnet/csharp/
2. OxyPlot rasmiy hujjatlari (grafik chizish kutubxonasi): https://oxyplot.readthedocs.io/
3. MathWorld – Differential Equations haqida nazariy materiallar: https://mathworld.wolfram.com/DifferentialEquation.html
4. GeeksforGeeks – Runge-Kutta va Euler usullari algoritmlari: https://www.geeksforgeeks.org/runge-kutta-method/ https://www.geeksforgeeks.org/euler-method-solving-ordinary-differential-equations/
5. Stack Overflow – dasturlashdagi amaliy yechimlar va muhokamalar: https://stackoverflow.com/
6. Chatgpt.com