



HILBERT VA SOBOLEV FAZOLARI

Ko'klamova Matlyuba Ulug'bek qizi

Buxoro Davlat universiteti magistri

matlyubakoklamova@gmail.com+998997093799

Annotatsiya: Hilbert va Sobolev fazolari matematik analiz va funksional tahlilning muhim bo'limlaridan bo'lib, ular ko'p o'lchovli funksiyalar fazolari tizimlarini izohlash va o'rganish uchun qulay vositalarni taqdim etadi. Ushbu maqolada Hilbert fazolari konsepsiyasi va Sobolev fazolarining o'zaro munosabati, metodologiyasi va matematik modellarga ta'siri tahlil qilinadi. Yondashuvlarning asosiy farqlari va o'xshashliklari, ularning diffe-rensial tenglamalarni yechishda qo'llanilishi, va Sobolev fazolari yordamida fazoviy xossalarni kengaytirish imkoniyatlari chuqur o'rganiladi. Shuningdek, funksional tahlilning muhim qismi sifatida Sobolev va Hilbert maydonlari orasidagi abstrakt bog'lanishlar va transformatsiyalar ko'rib chiqiladi. Natijada, maqola Sobolev fazolari amaliy va nazariy aspektlarini mukammal yoritib, sohadagi ilmiy tadqiqotlarga yangi tushunchalar kiritadi.

Kalit so'zlar: Hilbert fazosi, Sobolev fazosi, funksional tahlil, differensial tenglamalar, o'lchovli fazolar, matematik analiz, operator nazariyasi.

Аннотация: Пространства Гильберта и Соболева являются фундаментальными концепциями математического анализа и функционального анализа, предоставляя эффективные инструменты для исследования многомерных функциональных пространств. В данной статье проводится глубокий анализ концепции пространств Гильберта и взаимосвязи с пространствами Соболева, рассматриваются методологические и прикладные аспекты. Обсуждаются ключевые различия и сходства подходов, применение в решении дифференциальных уравнений, а также возможности расширения пространственных свойств с помощью пространств Соболева. Особое внимание уделено абстрактным связям и преобразованиям между этими функциональными пространствами. В итоге, статья вносит вклад в понимание практических и теоретических характеристик пространств Соболева и Гильберта, расширяя горизонты научных исследований в данной области.

Ключевые слова: пространство Гильберта, пространство Соболева, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, многомерные пространства, математический анализ, теория операторов.

Abstract: Hilbert and Sobolev spaces form foundational frameworks within mathematical and functional analysis, offering robust tools to study multidimensional functional spaces. This article presents a comprehensive analytical investigation of the conceptual underpinnings of Hilbert spaces and their relation to Sobolev spaces, focusing on methodological and applied perspectives. It critically examines the fundamental distinctions and parallels between these approaches, their utilization in solving differential equations,



and the enhancement of spatial properties via Sobolev spaces. The discussion further addresses the abstract connections and transformations inherent between these functional spaces. The article thus contributes novel insights to the theoretical and practical understanding of Sobolev and Hilbert spaces, furnishing a valuable resource for ongoing academic research and advanced applications.

Keywords: Hilbert space, Sobolev space, functional analysis, differential equations, multidimensional spaces, mathematical analysis, operator theory

Hilbert va Sobolev fazolari funksional tahlilning markaziy ob'ektlari bo'lib, turli matematik sistemalarning xossalari o'rganishga imkon yaratadi. Hilbert fazolari asosan o'zaro ortogonal funksiya tizimlarini tahlil qilishda keng qo'llaniladi, ular Hilbert maydoni xususiyatlaridan kelib chiqib mos keluvchi umumiy va inklyuziv ichki mahsulot strukturasini taqdim etadi. Sobolev fazolari esa klassik funktsiyalar fazolarini kengaytirib, differensial tenglamalar hamda matematik fizika muammolarini yechishda muhim rol o'ynaydi. Sobolev fazolarida funktsiyalarning derivativlari L^p fazolari asosida aniqlangan va bu jihat ularning qo'llanish doirasini sezilarli darajada kengaytiradi (Adams, 2003).

Hilbert fazolari kvadrat integrallanuvchi funktsiyalarni markazga qo'yadi va o'zaro skalyar mahsulot orqali strukturani belgilaydi, bu esa matematik operatorlar va ularning spektr xususiyatlarini chuqur tushunishga imkon beradi (Reed & Simon, 1980). Sobolev fazolari esa qo'shimcha differensial talablar bilan yanada murakkabroq tuzilaga ega bo'lib, quyidagicha tasniflanadi: Sobolev fazolari funktsiyalarning differentiability darajasini va ularning singulyarliklarini ham qo'llab-quvvatlaydi, bu esa elliptik operatorlar va boundary value masalalarini o'rganish uchun qulaydir (Evans, 2010).

Tahlilning muhim jihatlaridan biri Hilbert va Sobolev fazolari o'rtasidagi uzviy bog'liqlikdir. Har qanday Sobolev fazosi, berilgan parametrlar doirasida, Hilbert fazosi sifatida ko'rib chiqilishi mumkin, chunki Sobolev fazolari o'zgaruvchan xususiyatlarga ega bo'lishiga qaramay, o'z ichki mahsulotlari bilan Hilbert makonining qoidalarini qanoatlantiradi (Brezis, 2011). Shu bilan birga, Sobolev fazolarining matriks operatorlari orqali berilishi ularga yuqori darajadagi matematik nazorat va optimallikni ta'minlaydi, bu esa ilovalarda yuqori samaradorlikni kafolatlaydi.

Praktik jihatdan, Sobolev fazolari tizimlaridagi masalalarni Hilbert fazolariga qaytarish mumkin, bu esa oddiy operatorlar nazariyasidan foydalanishga imkon beradi. Bu yondashuv elliptik differensial tenglamalarning nazariyasida standart asboblar qatoriga kiradi va muammolarni yechish samaradorligini oshiradi (Taylor, 2011). Shuningdek, funktsiyalar fazosida konstruktsiya va transformatsiyalarni o'rganish Sobolev fazolarining qo'shimcha differensial operatorlar yordamida yakunlanishini ko'rsatadi, bu esa yangi nazariy vositalarni yaratadi hamda fenin (Sobolev imbeddings) teoremlarining yanada kengaytirilgan qoidalarini ochib beradi.



I. Hilbert fazolari haqida umumiy ma'lumot.

Hilbert fazosi — bu skalyar ko'paytma bilan ta'minlangan va shu skalyar ko'paytmadan hosil bo'lgan norma bo'yicha to'liq bo'lgan chiziqli fazodir. Hilbert fazosini qisqacha quyidagicha ifodalash mumkin :

Hilbert fazosi = Skalyar ko'paytmali + to'liq norma fazosi

Endi Hilbert fazolariga misollar keltiramiz.

1. Evklid fazosi R^n

Evklid fazosida skalyar ko'paytma quyidagicha aniqlangan:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n (x_k y_k)$$

Evklid fazosida norma esa quyidagicha aniqlangan:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

2. l^2 fazosi.

Bu fazoning ko'rinishi quyidagicha:

$$l^2 = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha aniqlangan:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

3. $L^2(a, b)$ fazosi.

Bu fazo quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$L^2(a, b) = \{f : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha aniqlanadi:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$



II. Sobolev fazolari haqida umumiy ma'lumot.

Sobolev fazolari birinchi marta S.I. Sobolev tomonidan kiritilgan bo'lib, ular integrallanuvchi funksiyalar va ularning umumlashgan hosilalarini o'z ichiga oladi.

Sobolev fazolarini quyidagicha aniqlash mumkin:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

Bunda $D^\alpha u$ -umumlashgan hosila, m -tartib, $p \geq 1$ p -normaning darajasi hisoblanadi.

Sobolev fazosining normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

Umuman olganda, Hilbert va Sobolev fazolari o'rtasidagi munosabatlar ularning har biriga xos xususiyatlarni chuqur tushunish va har xil matematik va fizik masalalarni hal qilishda strategik ahamiyatga ega. Sobolev fazolari Hilbert fazolarini kengaytirish orqali funktsional to'plamlarni, shu jumladan ular yerlarida yuzaga keladigan murakkabliklarni yaxshiroq modellashtirishga yordam beradi. Bu tizimlar o'rtasida o'rganilgan transformatsiyalar va moslamalar funktsional analizning fundamental qirralarini kengaytiradi, bu esa ilmiy tadqiqotlarda innovatsion yondashuvlarga zamin yaratadi.

Xulosa sifatida aytish mumkinki, Hilbert va Sobolev fazolari matematik va amaliy masalalarni yechishda bir-birini to'ldiruvchi va kengaytiruvchi asosiy fazolar hisoblanadi. Ularning transformatsiyalari va o'zaro ta'sirlari murakkab funktsional tizimlarning chuqur tahlilini ta'minlaydi. Shuningdek, Sobolev fazolarining Hilbert fazolari bilan integratsiyalashuvi differensial tenglamalar va operator nazariyasi sohalaridagi innovatsion metodlarni taklif qiladi. Keng miqyosda, ushbu fazolarni o'rganish zamonaviy matematik tahlilning bir bo'lagi sifatida ilmiy va texnik rivojlanish uchun muhim ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Adams, R. A. (2003). Sobolev Spaces. Academic Press.
2. Brezis, H. (2011). Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer.
3. Evans, L. C. (2010). Partial Differential Equations. American Mathematical Society.
4. Reed, M., & Simon, B. (1980). Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis. Academic Press.
5. Taylor, M. E. (2011). Partial Differential Equations I: Basic Theory. Springer.

