CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISHDA MINIMAL FARQLAR METODI

A.I.Ismoilov
Farg'ona davlat universiteti amaliy matematika va informatika kafedrasi katta o'qituvchisi fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori(PhD)
ismoilovaxrorjon@yandex.com
Nuritdinova Nargizaxon Muxtorali qizi
Farg'ona davlat universiteti talabasi
aikasd32ew@gmail.com

Annottatsiya: *Ushbu maqolada chiziqli algebraik sistema yechimini topishda keng qo'llaniladigan minimal farqlar metodi tahlil qilinadi. Metodning nazariy asoslari, asosiy formulalari va iterativ algoritmi ko'rib chiqiladi. Minimal farqlar metodining musbat aniqlangan simmetrik matritsalar uchun samaradorligi va konvergentsiya xususiyatlari ta'kidlanadi. Shuningdek, metod bo'yicha yechim topish jarayoni misol yordamida bosqichma-bosqich tushuntiriladi. Maqola minimal farqlar metodini chuqurroq tushunish va amaliy qo'llash uchun mo'ljallangan.*

Kalit so'zlar: *M.A. Krasnoseliskiy, S.G. Kreyn, musbat aniqlangan matritsa Gradientlar metodi, farqlar vektori, funksional minimum, iterativ yaqinlashish, geometrik progressiya, sistema yechimi*

Abstract: *This article analyzes the minimal residual method, widely used for solving linear algebraic systems. The theoretical foundations, main formulas, and iterative algorithm of the method are examined. The efficiency and convergence properties of the minimal residual method for positive definite symmetric matrices are emphasized. Additionally, the solution process of the method is explained step-by-step using an example. The article is intended for a deeper understanding and practical application of the minimal residual method.*

Keywords: *M.A. Krasnoselskii, S.G. Krein, positive definite matrix, gradient method, residual vector, functional minimum, iterative approximation, geometric progression, system solution*

Аннотация: *В данной статье анализируется метод минимальных невязок, широко используемый для решения линейных алгебраических систем. Рассматриваются теоретические основы, основные формулы и итеративный алгоритм метода. Особое внимание уделяется эффективности и сходимости*

метода минимальных невязок для положительно определённых симметричных матриц. Кроме того, процесс решения методом подробно объясняется на примере. Статья предназначена для углубленного понимания и практического применения метода минимальных невязок.

Ключевые слова: *М.А. Красносельский, С.Г. Крейн, положительно определённая матрица, градиентный метод, вектор невязки, функциональный минимум, итеративное приближение, геометрическая прогрессия, решение системы*

Kirish: Chiziqli algebraik sistemalar ko‘plab ilmiy va amaliy masalalarning yechimini topishda muhim o‘rin tutadi. Xususan, katta o‘lchamli sistema va murakkab matritsalar bilan ishlashda an’anaviy to‘g‘ridan-to‘g‘ri usullar samaradorligi kamayadi va hisoblash xarajatlari oshadi. Shuning uchun iterativ usullar — bosqichma-bosqich yaqinlashuv asosida yechim topuvchi algoritmlar — keng qo‘llaniladi.

Minimal farqlar metodi 1952-yilda mashhur matematiklar M.A. Krasnoseliskiy va S.G. Kreyn tomonidan ishlab chiqilgan bo‘lib, ayniqsa musbat aniqlangan simmetrik matritsalar uchun samarali hisoblanadi. Ushbu metodning asosiy g‘oyasi — har bir iteratsiyada farqlar (yoki qoldiq) vektorining normasi minimal bo‘lishi orqali sistema yechimiga tez va barqaror yaqinlashishdir.

Minimal farqlar metodining nazariy asoslari, matematik ifodalari va amaliy qo‘llanilishi ushbu maqolada batafsil ko‘rib chiqiladi. Shuningdek, metodning konvergentsiya xususiyatlari tahlil qilinib, aniq misol orqali iterativ yechim jarayoni tushuntiriladi. Bu esa o‘quvchiga minimal farqlar metodini chuqurroq anglash va uni amaliy masalalarda qo‘llash imkonini beradi.

Minimal farqlar metodi. Bu metod M.A.Krasnoseliskiy va C.G.Kreyn tomonidan 1952-yilda yaratilgan edi. Farz qilaylik, A musbat aniqlangan matritsa bo’lib, $\bar{x}^{(0)}$ esa $A\bar{x}=\bar{b}$ Sistema yechimining dastlabki yaqinlashishi bo’lsin. Odatdagidek, $\bar{r}^{(0)}$ orqali farqlar vektorini, ya’ni $\bar{b}-A\bar{x}^{(0)}$ ni belgilaymiz. Navbatdagi yaqinlashish $\bar{x}^{(1)}$ ni gradientlar metodidagidek $\bar{x}^{(0)}+\alpha_0\bar{r}^{(0)}$ ko’rinishda izlaymiz va α_0 parametrni shunday tanlab olamizki, $\left\|\bar{r}^{(1)}\right\|^2=(\bar{r}^{(1)},\bar{r}^{(1)})$ funksional minimumga aylansin. Bu yerda

$$\bar{r}^{(1)}=\bar{b}-A\bar{x}^{(1)}=\bar{r}^{(0)}-A(\bar{x}^{(1)}-\bar{x}^{(0)})==\bar{r}^{(0)}-\alpha_0\,A\bar{r}^{(0)}$$

Shunday qilib α_0 ni ushbu

$$(\bar r^{(1)},\bar r^{(1)})=(\bar r^{(0)}-\alpha_0 A\bar r^{(0)},\bar r^{(0)}-\alpha_0 A\bar r^{(0)})=\qquad(\bar r^{(0)},\bar r^{(0)})-2\alpha_0(\bar r^{(0)},A\bar r^{(0)})+\alpha_0^2(A\bar r^{(0)},A\bar r^{(0)})$$

$$=(\bar r^{(0)},\bar r^{(0)})-\frac{(A\bar r^{(0)},\bar r^{(0)})^2}{(A\bar r^{(0)},A\bar r^{(0)})}+(A\bar r^{(0)},A\bar r^{(0)})\left[a_0-\frac{(A\bar r^{(0)},\bar r^{(0)})}{A\bar r^{(0)},A\bar r^{(0)}}\right]^2$$

Ifodani minimumga aylanish shartidan topamiz. Bu ifodada esa o'zining minimal qiymati $(\bar r^{(0)},\bar r^{(0)})-\frac{(A\bar r^{(0)},\bar r^{(0)})^2}{(A\bar r^{(0)},A\bar r^{(0)})}$ ga $\alpha_0=\frac{(A\bar r^{(0)},\bar r^{(0)})}{A\bar r^{(0)},A\bar r^{(0)}}$ bo'lganda erishadi.

Demak birinchi qadamda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\bar x^{(1)}=\bar x^{(0)}+\alpha_0\bar r^{(0)},\qquad \alpha_0=\frac{(A\bar r^{(0)},\bar r^{(0)})}{A\bar r^{(0)},A\bar r^{(0)}}$$

Ikkinchi qadamda esa $\bar r^{(1)}=\bar b-A\bar x^{(1)}=\bar r^{(0)}-\alpha_0 A\bar r^{(0)}$

$$\alpha_1=\frac{(A\bar r^{(1)},\bar r^{(1)})}{(A\bar r^{(1)},A\bar r^{(1)})},\qquad \bar x^{(2)}=\bar x^{(1)}+\alpha_1\bar r^{(1)}$$

Xuddi shunga o'xshash k - qadamda quyidagi formulalarga ega bo'lamiz

$$\bar r^{(k)}=\bar b-A\bar x^{(k)}=\bar r^{(k-1)}-\alpha_{k-1}A\bar r^{(k-1)}$$

$$\alpha_k=\frac{(A\bar r^{(k)},\bar r^{(k)})}{(A\bar r^{(k)},A\bar r^{(k)})},\qquad \bar x^{(k+1)}=\bar x^{(k)}+\alpha_k\bar r^{(k)}$$

Yaqinlashish haqida gradientlar metodidagi kabi quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema. $\bar x^{(0)},\bar x^{(1)},.....,\bar x^{(k)}.....$ ketma-ket yaqinlashishlar $A\bar x=\bar b$ sistema yechimiga geometrik progressiya tezligida yaqinlashadi.

Misol. Ushbu sistema

$$\begin{aligned}5x_1+2x_2+x_3+x_4&=7\\2x_1+6x_2+x_3+x_4&=11\\x_1+x_2+8x_3+2x_4&=23\\x_1+x_2+2x_3+4x_4&=17\end{aligned}$$

Minimal farqlar metodi bilan yechilsin.

Yechish. Dastlabki yaqinlashish sifatida $\bar x^{(0)}=(0,0,0,1)'$ vektorni olamiz, u holda

$$\bar r^{(0)}=\bar b-A\bar x^{(0)}=(-3,0,9,5)',\ A\bar r^{(0)}=(-1,8,79,35)',$$

$$a_0=\frac{(A\bar r^{(0)},\bar r^{(0)})}{A\bar r^{(0)},A\bar r^{(0)}}=\frac{889}{7531}=0{,}1180454$$

$$\bar x^{(1)}=(-0{,}354136;0;1{,}062408;1{,}590227)'.$$

Shunga o'xshash navbatdagi metodlarni topishimiz mumkin:

$$\bar x^{(2)}=(0{,}008460;0{,}767495;2{,}005787;2{,}574838)'.$$

$$\bar{x}^{(3)} = (0,105047; 0,973666; 2,123706; 2,799272)',$$

$$\bar{x}^{(4)} = (0,023240; 0,979935; 1,986107; 2,898334)',$$

$$\bar{x}^{(5)} = (0,028442; 0,004896; 2,027116; 2,955150)',$$

$$\bar{x}^{(6)} = (0,007439; 0,994176; 2,001999; 2,969578)',$$

$$\bar{x}^{(7)} = (0,007863; 1,001331; 2,008379; 2,986709)',$$

$$\bar{x}^{(8)} = (0,002131; 0,99390; 2,000618; 2,990963)',$$

Aniq yechim $x^* = (0,1,2,3)'$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Xulosa: Ushbu maqolada minimal farqlar metodining nazariy asoslari va uning chiziqli algebraik sistema yechishdagi ahamiyati tahlil qilindi. Metod iterativ algoritm orqali sistema yechimiga barqaror va samarali yaqinlashishni ta’minlaydi, ayniqsa musbat aniqlangan simmetrik matritsalar uchun mos keladi. Formulalar va qadamlar aniq bayon etilib, funksional minimumga erishish sharti asosida optimal qadam uzunligi aniqlanadi. Shuningdek, misol yordamida metodning amaliy qo‘llanilishi ko‘rsatildi. Minimal farqlar metodining geometrik progressiya tarzida konvergentsiya qilish xususiyati uni ko‘plab hisoblash masalalarida qo‘llashga imkon beradi. Shu bois, ushbu metod chiziqli sistema yechimlarini topishda samarali va ishonchli vosita hisoblanadi.