TENGLAMALAR SISTEMASI UCHUN NYUTON METODI.

A.I.Ismoilov
amaliy matematika va informatika kafedrasi katta o'qituvchisi. fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori(PhD)
E-mail:ismoilovaxrorjon@yandex.com
Arabova Farzonabonu Akmaljon qizi
Farg'ona davlat universiteti Amaliy matematika yo'nalishi 3-kurs talabasi
E-mail: a07612720@gmail.com

Anotatsiya : *Mazkur maqolada noaniq va murakkab tenglamalar sistemalarini yechish muammosi hamda ularni sonli usullar orqali yechish yo'llari ko'rib chiqilgan. Jumladan, Nyuton metodi asosiy e'tiborga olingan bo'lib, uning matematik asoslari, algoritmik tuzilishi va amaliy qo'llanish imkoniyatlari yoritilgan. Metodning tez konvergentligi, aniqligi va algoritmik soddaligi uni zamonaviy hisoblash matematikasida muhim o'rin egallashiga sabab bo'ladi. Maqolada, shuningdek, Nyuton metodining afzalliklari va kamchiliklari tahlil qilinib, uning samarali ishlashi uchun zarur bo'lgan shartlar ko'rsatilgan. Misollar orqali usulning amaliy jihatlari yoritilib, sonli hisoblashda tutgan o'rni asoslab berilgan.*

Kalit so'zlar: *Yakobi matritsasi, vaktor funksiya, Teylor qator, Gorner sxemasi, Nyuton usuli, determinant.*

Annotation :*This article explores the problem of solving nonlinear systems of equations and the application of numerical methods for finding approximate solutions. Special attention is given to the Newton method, including its mathematical foundation, algorithmic structure, and practical applications. The method's rapid convergence, high accuracy, and algorithmic simplicity make it a key tool in modern computational mathematics. The article also analyzes the advantages and limitations of the method and outlines the necessary conditions for its effective implementation. Practical examples are provided to demonstrate the application and significance of the method in solving nonlinear systems.*

Key words: *Jacobi matrix, vector function, Taylor series, Gorner scheme, Newton's method, determinant.*

Аннотация: *В данной статье рассматривается задача решения нелинейных систем уравнений и применение численных методов для нахождения приближённых решений. Особое внимание уделено методу Ньютона, включая его математические основы, алгоритмическую структуру и практическое применение. Быстрая сходимость, высокая точность и*

алгоритмическая простота делают этот метод важным инструментом современной вычислительной математики. В статье также анализируются преимущества и недостатки метода, а также приводятся условия, необходимые для его эффективного использования. Практические примеры демонстрируют применение метода в решении нелинейных систем.

Ключевые слова: *Матрица Якоби, векторная функция, ряд Тейлора, схема Горнера, метод Ньютона, определитель.*

Biz bu yerda n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ noma'lumli n ta

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1(\bar{x}^0)}{\partial x_1}\varepsilon_1 + ... + \frac{\partial f_1(\bar{x}^0)}{\partial x_n}\varepsilon_n \approx -f_1(\bar{x}^0), \\ .... \\ \frac{\partial f_n(\bar{x}^0)}{\partial x_1}\varepsilon_1 + ... + \frac{\partial f_n(\bar{x}^0)}{\partial x_n}\varepsilon_n \approx -f_n(\bar{x}^0) \end{cases} \quad (1)$$

tenglamalar sistemasini yechish uchun Nyuton metodini koʻrib chiqamiz. Yozuvni qisqaroq qilish maqsadida $\bar{x}^{(0)}$ $\bar{x}$ orqali $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektorni va $\bar{f}(\bar{x})$ orqali

$$f(\bar{x}) = (f_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_n(x_1, x_2, ..., x_n))$$

Vektor funksiyani belgilaymiz. U holda, (1) sistemani bitta

$$\bar{f}(\bar{x}) = 0$$

vektor-tenglama shaklida yozish mumkin. (1) sistemani yechish uchun Nyuton metodi, tabiiyki bitta sonli tenglama uchun yuqorida koʻrib oʻtilgan metodning umumlashganidir. Yuqoridagidek bu yerda ham metodining asosiy gʻoyasi chiziqli bo'lmagan sistemani ketma-ket chiziqli sistemaga keltirishdan iboratdir. Agar aniq yechim bilan taqribiy yechim orasidagi xato yetarlicha kichik boʻlsa, ajratib olingan chiziqli qism tenglamalar sistemasining bosh qismi boʻladi. Faraz qilaylik, bizga (1) sistemaning taqribiy yechimi $\bar{x}^0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ ma'lum boʻlsin, $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ orqali $\bar{\xi} - \bar{x}^{(0)} = (\xi_1 - x_1^{(0)}, \xi_2 - x_2^{(0)}, ..., \xi_n - x_n^{(0)})$. vector-xatoni belgilaymiz. (1) sistemada $\bar{x}$ o'rniga $\bar{x}^0 + \bar{\varepsilon}$ ni qo'yib, hosil boʻlgan sistemaning chap tomonini $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ larning darajalariga nisbatan Teylor qatoriga yoyib, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ ga nisbatan chiziqli qismini saqlab, quyidagi tarkibiy sistemaga ega boʻlamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1(\overline{x}^0)}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \ldots + \frac{\partial f_1(\overline{x}^0)}{\partial x_n}\varepsilon_n \approx -f_1(\overline{x}^0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n(\overline{x}^0)}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \ldots + \frac{\partial f_n(\overline{x}^0)}{\partial x_n}\varepsilon_n \approx -f_n(\overline{x}^0) \end{cases} \qquad (2)$$

Bu sistemani yechib, xatoning taqribiy qiymati $\overline{\varepsilon}^{(0)} = (\overline{\varepsilon}_1^{(0)}, \overline{\varepsilon}_2^{(0)}, \ldots, \overline{\varepsilon}_n^{(0)})$ ni topamiz. $\overline{\varepsilon}^{(0)}$ ni $\overline{x}^{(0)}$ ga qo‘shib, navbatdagi yaqinlashish vektorini hosil qilamiz:

$$\overline{x}^{(1)} = \overline{x}^{(0)} + \overline{\varepsilon}^{(0)} = (x_1^{(0)} + \varepsilon_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} + \varepsilon_n^{(0)}).$$

O‘z navbatida $\overline{x}^{(1)}$ yaxshilashimiz uchun buning uchun $\overline{x}^{(0)}$ o‘rniga $\overline{x}^{(1)}$ qo‘yib, (2) ko‘rinishidagi sistemani tuzish kerak. Shunday qilib, agar (2) ko‘rinishidagi sistemalar yechimga ega bo'lsa biz ketma-ket yaqinlashishlar vektorlarini topamiz .

Qulaylik uchun Yakobi matritsani kiritamiz:

$$\overline{f_x}(\overline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\overline{x})}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1(\overline{x})}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n(\overline{x})}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n(\overline{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Bu matritsa $\inf_{z \in U_r(\zeta)} |f'(z)| = m_1 > 0, \quad \sup_{z \in U_r(\zeta)} |f''(z)| = M_2$ yordamida sistemani quyidagi bitta vector-sistema shaklidamyozishimiz mumkin:

$$\overline{f_x}(\overline{x}^{(0)})\overline{\varepsilon}^{(0)} = -\overline{f}(\overline{x}^{(0)}).$$

Faraz qilaylik, $\overline{x} = \overline{\xi}$ nuqtada $\overline{f_x}(\overline{\xi})$ maxsusmas matritsa bo’lsin. Determinant o‘z elementlarining uzluksiz funksiyalari bo’lganligi uchun $\overline{x} = \overline{\xi}$ nuqtaning biror G atrofida (2) maxsusmas matritsa bo’lib, uning teskarisi $\overline{f_x^{-1}}(\overline{x})$ mavjud bo’ladi.

Faraz qilaylik, $\overline{x}^{(0)} \in G$ y vaqtda (3) ning har ikkala tomonini $\overline{f_x^{-1}}(\overline{x})$ ga ko‘paytirib,

$$\overline{\varepsilon}^{(0)} = -\overline{f}_x^{-1}(\overline{x}^{(0)})\overline{f}(\overline{x}^{(0)})$$

yoki

$$\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(0)} = -\overline{f}_x^{-1}(\overline{x}^{(0)})\overline{f}(\overline{x}^{(0)}).$$

ni hosil qilamiz. Agar $\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, \ldots, \overline{x}^{(k)}$ lar G atrofda yotsa, u holda $\overline{x}^{(k+1)}$ ni

$$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} - \overline{f}_x^{-1}(\overline{x}^{(k)})\overline{f}(\overline{x}^{(k)}) \ (4)$$

tenglikni topamiz. Bu $\overline{x}^{(k)}$ ketma ket yaqinlashishlarni topish uchun Nyuton qoidasidir. Bu qoidaning amalga oshishi uchun $\overline{x}^{(k)}(k=0,1,2,...)$ lar $\overline{f}(\overline{x})$ ning aniqlanish sohasida yotishi va $\overline{f_x}(\overline{x}^{(k)})$ matritsalar maxsusmas bo'lishi kerak.

Biz hozir L.V.Kantarovichning $|z_k-\zeta|<q^{2^k-1}|z_0-\zeta|$. Nyuton jarayonining yaqinlashishi haqidagi teoremasini isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Agar $\overline{f}(\overline{x})$ vektor- funksiya va dastlabki yaqinlashish vektori $\overline{x}^{(0)}$ quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) $\overline{x}^{(0)}$ nuqtada $\overline{f_x}(\overline{x}^{(0)})$ Yakobi matritsasining determinanti $\Delta=\Delta(\overline{f_x}(\overline{x}^{(0)})(\overline{x}^{(0)}))$ noldan farqli va $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi Δ_{jk} bo'lib va

$$\frac{1}{|\Delta|}\sum_{j=1}^{n}\left|\Delta_{jk}\right|\leq B\ (k=\overline{1,n});$$

baho o'rinli bo'lsa;

2) $\left|f_i(\overline{x}^{(0)})\right|\leq\eta\ \ (i=\overline{1,n});$

3) $\overline{x}^{(0)}$ ning

$$\left|x_i-x_i^{(0)}\right|\leq 2B\eta\ \ (i=\overline{1,n});$$

atrofidagi nuqtalar uchun

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j\partial x_k}\right|\leq L\ \ (i=\overline{1,n});$$

tengsizliklar bajarilsa;

4) B,η,L miqdorlar

$$h=B^2\eta L\leq\frac{1}{2}$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $\overline{x}^{(0)}$ nuqtaning

$$\left|x_i-x_i^{(0)}\right|\leq\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}B\eta\ \ (i=\overline{1,n});$$

atrofida (1) Sistema yagona $\overline{\xi}=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ yechimga ega bo'lib, (4) bilan aniqlangan $\overline{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)})$ Nyuton ketma- ketligi yaqinlashadi va shu bilan birga, yaqinlashish tezligi

$$\max_{1\leq i\leq n}\left|x_i^{(k)}-\xi_i\right|\leq\frac{1}{2^{k-1}}(2h)^{2^k-1}B\eta$$

tengsizlik bilan baholanadi. Shunga o’xshash teoremani Nyutonning modifikatsiyalangan metodi uchun ta’riflash va isbot qilish mumkin. Shuni ham ta’kidlab o’tish kerakki, (2) sistemadatenglamalar soni ikkita boʻlganda bu sistemani determinantlar yordamida yechish kerak. Tenglamalarning soni ikkitadan koʻp bo’lsa, bunday sistemalarni keytingi bobda keltiriladigan metodlarning birortasi bilan yechish ma’quldur. Agar bizga ikkita

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi berilgan boʻlsa, u holda (4) qoida quyidagicha yoziladi:

$$x_{k+1}=x_k-\left(\frac{g_y f-f_y g}{f_x g_y-f_y g_x}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}}$$

$$(k=0,1,2...)$$

$$y_{k+1}=y_k-\left(\frac{f_y g-g_y f}{f_x g_y-f_y g_x}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}}$$

Misol:

Berilgan: $\begin{cases} x_1+3\lg x_1-x_2^2=0 \\ 2x_1^2-x_1x_2-5x_1+1=0 \end{cases}$

Yakobi matritsasi

$$W(\mathrm{X})=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}+1 & -2x_2 \\ 2x_1-x_2-5 & -x_1 \end{bmatrix}$$

Datlabki baholash

$$X(0)=\begin{bmatrix} 3{,}4 \\ 2{,}2 \end{bmatrix}$$

1) $W(X(0))=\begin{bmatrix} 1{,}882 & -4{,}4 \\ 6{,}4 & -3{,}4 \end{bmatrix}$ $\Delta=21{,}761$

2) $W^{-1}(X(0))=\begin{bmatrix} -0{,}156 & 0{,}202 \\ -0{,}294 & 0{,}086 \end{bmatrix}$

3) $F(X(0))=\begin{bmatrix} 0{,}154 \\ -0{,}36 \end{bmatrix}$

$$X(1)=\begin{bmatrix} 3{,}4 \\ 2{,}2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -0{,}156 & 0{,}202 \\ -0{,}294 & 0{,}086 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}154 \\ -0{,}36 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3{,}4 \\ 2{,}2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -0{,}097 \\ -0{,}076 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3{,}497 \\ 2{,}276 \end{bmatrix}$$

va hokazo

Takrorlash natijalarini jadvalga umumlashtitramiz.

$\max(|\Delta x_1|,|\Delta x_2|) \le \varepsilon$ aniqlikda hisoblashni to'xtatamiz.

0	3.4	0.097	2.2	0.076
1	3.497		2.276	

Misol:

$P(x)$ Kophadni $(x-a)$ ga bo'lganingizda (bu Gorner sxemasi orqali amalga oshiriladi) quyidagi shartlar bajarilsin:

$b_0 = a_0 > 0, b_i > 0 \quad (\mathrm{i} = \overline{1,n})$

Talab qilinadi: $P(x)$ ning barcha ildizlari α dan kichik ekanligini ko'rsating.

-Teoremaning mazmuni: Agar $P(x)$ ko'phadni $\mathrm{x} - \alpha$ ga bo'lganda Gorner sxemasidagi barcha koefitsientlar musbat bo'lsa, u holda:

- Ko'phadning barcha haqiqiy ildizlari α dan kichik bo'ladi.

Bu- Shturm yoki Rouce-Descartes teoremalarining xos shaklidir.

Gorner sxemasi haqida aytaylik:

$P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1 \quad P(\alpha) > 0$ ni hisoblashda:

$b_0 = a_0$

$b_1 = b_0\alpha + a_1$

$b_2 = b_1\alpha + a_2$

...

$b_n = b_{n-1}\alpha + a_n$

Shart: Hamma $b_i > 0$ bo'lsin

Isboti: Faraz qilaylik , $P(x)$ ning hech bo'lmaganda bitta ildizi bo'lsin, $\varepsilon \ge \alpha$ bo'lsin,

Lekin $x = \alpha$ nuqtasida Gorener sxemasi orqali har bir oraliq qiymat $b_i > 0$ bo'lmoqda. Bu esa shuni anglatadiki: $P(\alpha) > 0$, Bundan tashqari, ko'phadning qiymati va hosilalari hasm musbat bo'lishi mumkin.

Bu esa shuni ko'rsatadi: $x = \alpha$ va undan kata nuqtalarda ko'phad 0 bo'lmaydi. Shuning uchun , barcha ildizlar α dan kichik bo'lishi kerak.

Aytaylik : $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

Bu ko'phadning ildizlari aslida x=1 bo'yicha uch karrali ildizga ega(ya'ni) $(x-1)^3$.

Tekshirib ko'ramiz, masalan $\alpha = 2$ deb olaylik va Gorner sxemasi qilamiz:

$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = -3, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = -1$

$\alpha = 2$

Hisoblaymiz:

$b_0 = 1$

$b_1 = b_0\alpha + a_1 = 1*2 + (-3) = 1$ -Bu manfiy, demak bu $\alpha = 1$ qiymati mos emas.

Endi $\alpha = 0.5$ deb olaylik:

$b_0 = 1$

$b_1 = 1*1 + (-3) = -2$ - hamon manfiy

Faqat $\alpha = 1$ da:

$b_0 = 1$

$b_1 = 1*1 + (-3) = -2$ -Bu ham manfiy. Shunday qilib, Bu ko'phadda Gorner sxemasi orqali barcha bo'ladigan $b_i > 0$ bo'ladigan α yo'q, bu esa uning ildizi α dan kichik emasligini bildiradi. Xulosa qiladigan bo'lsak agar α >0 topilib, Gorner sxemasida barcha $b_i > 0$ bo'lsa, demak:

$P(x)$ ning barcha ildizlari dan α kichik.

Xulosa

Tenglamalar sistemasini yechishda Nyuton usuli — yuqori aniqlikka ega, tez konvergent hisoblash usuli sifatida keng qo'llaniladi. Bu usul iteratsion jarayon orqali har bir qadamda yechimga yaqinlashib boradi va, ayniqsa, boshlang'ich nuqta yetarlicha aniq tanlanganda, tezda natijaga erishiladi. Metod asosida funksiyaning Taylor qatoridan foydalanish yotadi va har bir iteratsiyada Jakobi matritsasining hisoblanishi talab etiladi. Bu esa Nyuton usulini kuchli va noaniqlikni kamaytiruvchi vosita sifatida tavsiflaydi. Shu bilan birga, usulning konvergentsiyasi har doim ham kafolatlanmaganligi sababli, boshlang'ich taxmin va funksiyaning xossalariga alohida e'tibor qaratish zarur bo'ladi. Umuman olganda, Nyuton metodi — murakkab va noaniq tenglamalar sistemasining sonli yechimini topishda samarali, matematik asoslangan va amaliy jihatdan qulay yechimlardan biri bo'lib, ilmiy va texnik sohalarda keng tatbiq etiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abduazizov A.A., Axmedov M. – Numerik metodlar. Toshkent: "O'zbekiston" nashriyoti, 2012.
2. Xolmuhamedov S.X. – Sonli metodlar. Toshkent: TDPU, 2019.
3. Калитев Н.П., Куреев В.В. – Численные методы. Москва: Наука, 1980.
4. Burden R.L., Faires J.D. – Numerical Analysis. 9th Edition, Brooks Cole, 2010.
5. Conte S.D., de Boor C. – Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach. McGraw-Hill, 1980.

6. Chapra S.C., Canale R.P. – Numerical Methods for Engineers. 7th Edition, McGraw-Hill Education, 2015.
7. Яковлев В.А. – Численные методы и программирование. Москва: Высшая школа, 2005.
8. M. Isroilov- Hisoblash metodlari.
https://studizba.com/lectures/inzhenerija/matematicheskie-metody-v-avtomatizacii-i-jelektrosnabzhenii/37283-chislennoe-reshenie-sistem-nelinejnyh-uravnenij.html