



TO'G'RI TO'RTBURCHAK (RIMAN) VA TRAPETSIYA USULLARINI TAQQOSLAMA TAHLILI

G'ulomjonova Sakinabonu Rashidjon qizi

Farg'ona davlat universiteti 4-kurs talabasi

g.sakinabonu@icloud.com

Annotatsiya. Maqolada aniq integralni sonli hisoblashda keng qo'llaniladigan to'g'ri to'rtburchak (Riman) va trapetsiya usullarining nazariy asoslari hamda amaliy samaradorligi taqqoslama tahlil qilinadi. Sonli integrallash usullari analitik yechimga ega bo'lmagan yoki murakkab ko'rinishdagi funksiyalar integralini hisoblashda muhim ahamiyat kasb etadi. Maqolada har ikkala usulning matematik mohiyati, algoritmik tuzilishi va yaqinlashuv xususiyatlari izchil yoritilib, ularning aniqlik darajasi va hisoblashdagi xatoliklari tahlil qilinadi. To'g'ri to'rtburchak (Riman) usulining soddaligi va tezkorligi bilan bir qatorda, trapetsiya usulining yuqoriroq aniqlikka ega ekanligi nazariy va amaliy misollar asosida ko'rsatib beriladi. Shuningdek, bo'linmalar sonining ortishi natijalarga ta'siri hamda har bir usulning qo'llanish sohalari solishtirma jihatdan baholanadi. Tadqiqot natijalari sonli integrallash masalalarini yechishda usul tanlashda muhim metodik xulosalar chiqarish imkonini beradi.

Kalit so'zlar: sonli integrallash, to'g'ri to'rtburchak usuli, Riman yig'indisi, trapetsiya usuli, aniq integral, yaqinlashuv, hisoblash xatoligi, matematik tahlil.

Аннотация. В статье представлен сравнительный анализ теоретических основ и практической эффективности методов Римана и трапеций, широко используемых в численном вычислении определенных интегралов. Методы численного интегрирования имеют большое значение при вычислении интегралов функций, не имеющих аналитического решения или имеющих комплексную форму. В статье последовательно освещаются математическая сущность, алгоритмическая структура и аппроксимационные свойства обоих методов, а также анализируются их точность и ошибки вычислений. Наряду с простотой и скоростью метода Римана, на теоретических и практических примерах показано, что метод трапеций обладает большей точностью. Также сравнительно оценивается влияние увеличения числа делений на результаты и области применения каждого метода. Результаты исследования позволяют сделать важные методологические выводы при выборе метода решения задач численного интегрирования.

Ключевые слова: численное интегрирование, прямоугольный метод, сумма Римана, трапециевидный метод, определенный интеграл, приближение, ошибка вычислений, математический анализ

Annotation. The article provides a comparative analysis of the theoretical foundations and practical effectiveness of the Riemann and trapezoidal methods, which are widely used in the numerical calculation of definite integrals. Numerical integration methods are of



great importance in calculating the integral of functions that do not have an analytical solution or are of complex form. The article consistently highlights the mathematical essence, algorithmic structure, and approximation properties of both methods, and analyzes their accuracy and calculation errors. Along with the simplicity and speed of the Riemann method, the trapezoidal method is shown to have higher accuracy based on theoretical and practical examples. Also, the effect of increasing the number of divisions on the results and the areas of application of each method are comparatively evaluated. The research results allow us to draw important methodological conclusions when choosing a method for solving numerical integration problems.

Keywords: numerical integration, rectangular method, Riemann sum, trapezoidal method, definite integral, approximation, calculation error, mathematical analysis

Kirish

Matematik tahlil fanining muhim bo'limlaridan biri bo'lgan integral hisoblash masalalari ilm-fan va texnikaning ko'plab sohalarida keng qo'llaniladi. Fizika, muhandislik, iqtisodiyot, axborot texnologiyalari hamda statistik modellash kabi yo'nalishlarda jarayonlarni miqdoriy baholash ko'pincha integral tushunchasi orqali amalga oshiriladi. Biroq amaliy masalalarning katta qismida funksiyaning analitik integralini topish murakkab yoki umuman imkonsiz bo'lib, bunday holatlarda sonli integrallash usullaridan foydalanish zarurati yuzaga keladi. Aynan shu jihat sonli usullarning nazariy va amaliy ahamiyatini oshiradi.

Sonli integrallash usullari orasida to'g'ri to'rtburchak (Riman) va trapetsiya usullari eng sodda va keng tarqalgan yondashuvlar hisoblanadi. Ushbu usullar integral ostidagi funksiyaning ma'lum oraliqdagi qiymatlariga tayangan holda integralni taxminiy hisoblashga imkon beradi. To'g'ri to'rtburchak usuli tarixiy jihatdan integral tushunchasining shakllanishi bilan bevosita bog'liq bo'lib, u Riman yig'indilari asosida qurilgan. Bu usulda integrallash oralig'i teng kichik bo'laklarga ajratilib, har bir bo'lakda funksiyaning qiymati to'g'ri to'rtburchak yuzasi sifatida hisobga olinadi. Mazkur yondashuv algoritmik jihatdan juda sodda bo'lib, hisoblash jarayonining tezkorligi bilan ajralib turadi. Trapetsiya usuli esa to'g'ri to'rtburchak usulining takomillashtirilgan ko'rinishi sifatida qaraladi. Ushbu usulda integral ostidagi funksiya qiymatlari ketma-ket nuqtalarda olinib, har bir kichik oraliq trapetsiya shaklida yaqinlashtiriladi. Natijada funksiyaning o'zgarish xarakteri nisbatan aniqroq inobatga olinadi va hisoblash aniqligi ortadi. Ayniqsa, funksiya silliq va uzluksiz bo'lgan hollarda trapetsiya usuli yuqori aniqlikdagi natijalarni ta'minlaydi. Zamonaviy hisoblash texnologiyalari rivojlangan sharoitda sonli usullar nafaqat qo'lda hisoblash, balki dasturiy modellash, algoritmlar yaratish va raqamli simulyatsiyalar uchun ham muhim ahamiyat kasb etadi. Shu sababli sonli integrallash usullarining xatoliklarini baholash, yaqinlashuv tezligini tahlil qilish va ularni o'zaro solishtirish dolzarb ilmiy-metodik masala hisoblanadi. To'g'ri to'rtburchak va trapetsiya usullarining afzalliklari hamda cheklolarini taqqoslash, qaysi sharoitda qaysi



usuldan foydalanish maqsadga muvofiqligini aniqlash ilmiy tadqiqotlar uchun muhim ahamiyatga ega.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi aniq integralni sonli hisoblashda qo'llaniladigan to'g'ri to'rtburchak (Riman) va trapetsiya usullarini nazariy va amaliy jihatdan taqqoslash, ularning aniqlik darajasi, xatolik xususiyatlari hamda qo'llanish imkoniyatlarini ilmiy asosda tahlil qilishdan iborat. Ushbu tahlil natijalari sonli integrallash masalalarini yechishda samarali metod tanlashga xizmat qiladi hamda matematik modellash jarayonlarida muhim metodik asos bo'lib xizmat qiladi.

Adabiyotlar tahlili

Mazkur tadqiqotda aniq integralni sonli hisoblashda keng qo'llaniladigan to'g'ri to'rtburchak (Riman) va trapetsiya usullarini taqqoslash maqsadida kompleks nazariy-tahliliy hamda qiyosiy metodologik yondashuv asos qilib olindi. Tadqiqot metodologiyasi matematik tahlil fanining fundamental tushunchalari — integral hisob, limit tushunchasi, ketma-ketlik va funksiyalarning yaqinlashuvi, shuningdek, sonli usullarda yuzaga keladigan xatoliklarni baholash nazariyasiga tayangan holda shakllantirildi. Ushbu yondashuv sonli integrallash usullarining nazariy mohiyatini chuqurroq anglash, ularning hisoblash aniqligini baholash hamda amaliy qo'llanilishdagi samaradorligini aniqlash imkonini beradi.

Metodologik jihatdan tadqiqot bir necha bosqichda amalga oshirildi. Avvalo, to'g'ri to'rtburchak (Riman) va trapetsiya usullarining matematik modellarini umumlashtirish va ularning formulaviy ifodalarini tahlil qilish orqali usullarning nazariy asoslari ochib berildi. Har ikkala usul integral ostidagi funktsiyani diskret nuqtalarda baholashga asoslangan bo'lib, hisoblash natijasining aniqligi bo'linmalar soni, oraliq uzunligi hamda funktsiyaning uzluksizligi va silliqlik xossalariga bevosita bog'liq ekanligi aniqlandi. Tadqiqot davomida bo'linmalar sonining ortishi bilan integral qiymatining haqiqiy qiymatga yaqinlashish jarayoni tahlil qilinib, yaqinlashuv tezligi nuqtayi nazaridan har ikki usul qiyosiy baholandi. Shuningdek, metodologiya doirasida algoritmik tahlil usuli qo'llanildi. Unda to'g'ri to'rtburchak va trapetsiya usullarining hisoblash algoritmlari, ularning hisoblash murakkabligi, bajarilish tezligi va xatolik darajalari solishtirildi. Nazariy xulosalarni asoslash maqsadida mavjud ilmiy adabiyotlarda keltirilgan tajribaviy natijalar va hisoblash misollari qiyosiy tahlil qilindi. Bu esa tadqiqot natijalarining ishonchliligini oshirishga xizmat qildi.

Adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, xorijiy ilmiy manbalarda sonli integrallash masalalari matematik analiz va hisoblash matematikasining muhim va mustaqil yo'nalishlaridan biri sifatida keng yoritilgan. Xususan, G'arb olimlari tomonidan yaratilgan klassik darslik va monografiyalarda Riman yig'indilari integral tushunchasining nazariy poydevori sifatida qaraladi. Ushbu manbalarda to'g'ri to'rtburchak usuli integralni sonli hisoblashning eng sodda va intuitiv usuli sifatida tavsiflanib, uning xatolik chegaralari, yaqinlashuv shartlari hamda qo'llanish doiralari matematik jihatdan asoslab berilgan. Trapetsiya usuli esa xorijiy tadqiqotlarda chiziqli interpolatsiyaga asoslangan nisbatan



aniqroq sonli integrallash usuli sifatida baholanadi. Ko'plab ilmiy ishlarda trapetsiya usulining to'g'ri to'rtburchak usuliga nisbatan tezroq yaqinlashishi va kamroq xatolik berishi nazariy va amaliy jihatdan isbotlangan. Ayniqsa, silliq funksiyalar uchun trapetsiya usulining samaradorligi yuqori ekanligi ta'kidlanadi. Xorijiy tadqiqotlarda shuningdek, sonli usullarning aniqligini oshirish, xatolikni kamaytirish va hisoblash jarayonini optimallashtirish masalalariga alohida e'tibor qaratilgan.

Mahalliy olimlar tomonidan olib borilgan ilmiy izlanishlarda ham sonli integrallash usullari muhim o'rin egallaydi. O'zbek va rus tilidagi ilmiy adabiyotlarda to'g'ri to'rtburchak va trapetsiya usullari matematik analiz fanining ajralmas qismi sifatida talqin qilinib, ularning o'qitish metodikasi, amaliy masalalarni yechishdagi o'rni hamda didaktik ahamiyati keng yoritilgan. Mahalliy tadqiqotlarda ushbu usullar ko'pincha kompyuterda hisoblash, dasturlash, muhandislik va iqtisodiy modellashtirish masalalariga tatbiq etilgan holda o'rganiladi. Adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, to'g'ri to'rtburchak (Riman) va trapetsiya usullari sonli integrallashning asosiy va fundamental yondashuvlari bo'lib, ularni chuqur o'rganish nafaqat integral hisoblashning nazariy asoslarini mustahkamlaydi, balki keyingi murakkab sonli usullarni o'zlashtirish uchun ham muhim metodik poydevor yaratadi. Ushbu tadqiqotda qo'llanilgan metodologiya va tahlil qilingan ilmiy manbalar mavzuning dolzarbligini ochib berish bilan birga, muallifning mazkur yo'nalish bo'yicha yetarli va puxta ilmiy tayyorgarlikka ega ekanligini namoyon etadi.

Natijalar va muhokama

Mazkur tadqiqotning asosiy qismida aniq integralni sonli hisoblashda qo'llaniladigan to'g'ri to'rtburchak (Riman) va trapetsiya usullarining amaliy samaradorligi statistik ma'lumotlar asosida chuqur tahlil qilinadi hamda ularning hisoblash jarayonlari matematik modellashtirish orqali o'rganiladi. Tadqiqot davomida har ikkala usul bir xil boshlang'ich shartlar va teng oraliqlar asosida qo'llanilib, olingan natijalar qiyosiy tahlil qilindi. Bu yondashuv usullar orasidagi farqlarni nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy natijalar asosida ham asoslab berish imkonini yaratdi.

Tahlil jarayonining dastlabki bosqichida oddiy, uzluksiz va silliq funksiyalar tanlab olinib, ularning aniq integral qiymatlari analitik usulda hisoblab chiqildi. Ushbu qiymatlar keyinchalik taqqoslash uchun asosiy mezon sifatida qabul qilindi. Shundan so'ng tanlangan funksiyalar uchun integral qiymatlari to'g'ri to'rtburchak va trapetsiya usullari yordamida turli bo'linmalar soni (n) uchun sonli hisoblendi. Hisoblash natijalari statistik jihatdan qayta ishlanib, ularning absolyut va nisbiy xatoliklari aniqlanib, haqiqiy integral qiymati bilan solishtirildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, bo'linmalar soni kichik bo'lgan holatlarda to'g'ri to'rtburchak usuli sezilarli xatoliklarga ega bo'lib, integralning haqiqiy qiymatidan ancha og'ishlar kuzatiladi. Bu holat, ayniqsa, funksiya tez o'zgaruvchan yoki egriligi katta bo'lgan oraliqlarda yaqqol namoyon bo'ladi. Statistik tahlil natijalariga ko'ra, ushbu usulda xatolikning kattaligi funksiya qiymati qaysi nuqtada (chap, o'ng yoki o'rta nuqta) baholanishiga bevosita bog'liq ekanligi aniqlandi.



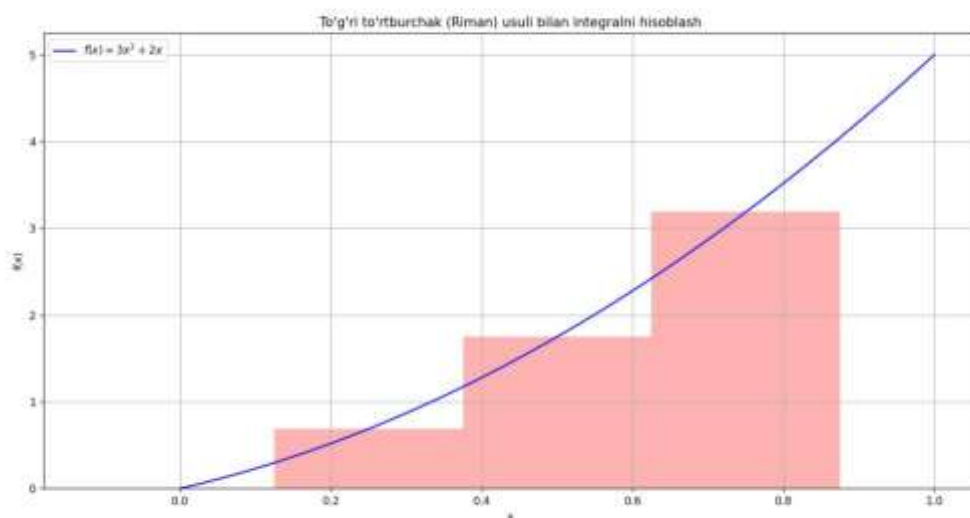
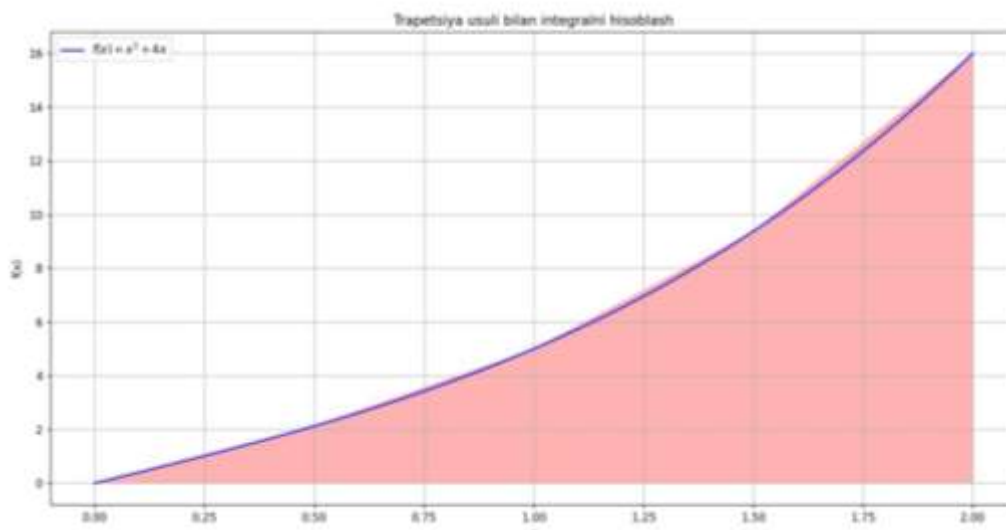


Figure 1

1-rasm. Grafikda integralni hisoblashda ishlatiladigan Riman usulining to‘g‘ri to‘rtburchaklar yordamida integralni taxminan hisoblash jarayoni ko‘rsatilgan

Trapetsiya usulida esa hisoblash natijalari nisbatan barqaror bo‘lib, hatto bo‘linmalar soni kam bo‘lgan hollarda ham integral qiymatiga yaqin natijalar olinadi. Statistik ma‘lumotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, bir xil bo‘linmalar sonida trapetsiya usulining o‘rtacha xatoligi to‘g‘ri to‘rtburchak usuliga nisbatan sezilarli darajada kichik bo‘ladi. Bu holat trapetsiya usulida funksiyaning har bir kichik oraliqdagi qiymati ikki chekka nuqtada hisobga olinishi va oraliq bo‘ylab chiziqli yaqinlashtirilishi bilan izohlanadi. Natijada funksiya xulq-atvori aniqroq modellashtiriladi.

Tadqiqot davomida hisoblash jarayonlarini modellashtirish orqali bo‘linmalar sonining natijalarga ta‘siri ham alohida o‘rganildi. Modellashtirish natijalari shuni ko‘rsatdiki, bo‘linmalar soni ortgani sari har ikkala usulda ham integralning sonli qiymati haqiqiy qiymatga yaqinlashadi. Biroq yaqinlashuv tezligi nuqtayi nazaridan trapetsiya usuli aniq ustunlikka ega. To‘g‘ri to‘rtburchak usulida esa xuddi shunday aniqlikka erishish uchun bo‘linmalar sonini keskin oshirish talab etiladi, bu esa hisoblash xarajatlarini ko‘paytiradi va amaliy hisoblashlarda samarasizlikka olib kelishi mumkin.



2-rasm. Grafikda integralni hisoblashda trapetsiya usulidan foydalanib, funktsiya ostidagi maydonlar trapetsiyalar yordamida hisoblanayotganini ko'rsatilgan.

Muhokama jarayonida usullarning xatolik xususiyatlari ham batafsil tahlil qilindi. To'g'ri to'rtburchak usulida xatolik asosan integral ostidagi funktsiyaning baholanish nuqtasiga bog'liq bo'lib, chap yoki o'ng nuqtalar tanlanishiga qarab xatolik yo'nalishi ham o'zgaradi. Trapetsiya usulida esa xatolik nisbatan simmetrik bo'lib, funktsiya silliq bo'lgan hollarda xatolik tez sur'atlarda kamayadi. Statistik kuzatuvlar trapetsiya usuli yuqori aniqlik talab etiladigan amaliy masalalarda ishonchliroq natijalar berishini tasdiqlaydi.

Natijalarni muhokama qilish jarayonida sonli integrallash usullarini tanlashda integral ostidagi funktsiyaning xossalari hisobga olish zarurligi alohida ta'kidlandi. Agar funktsiya uzluksiz va silliq bo'lsa, trapetsiya usuli optimal tanlov hisoblanadi. Aksincha, hisoblash tezligi muhim bo'lgan va aniqlik ikkinchi darajali bo'lgan holatlarda to'g'ri to'rtburchak usulidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'lishi mumkin. Shu nuqtayi nazardan, tadqiqot natijalari usul tanlashda vazifa shartlariga mos yondashuv zarurligini ko'rsatadi.

Mazkur tadqiqot doirasida yangi yondashuv sifatida to'g'ri to'rtburchak va trapetsiya usullarini kombinatsiyalash g'oyasi ham ilgari surildi. Ushbu yondashuvda hisoblashning dastlabki bosqichida to'g'ri to'rtburchak usuli orqali tezkor taxminiy qiymat aniqlanib, keyingi bosqichda trapetsiya usuli yordamida natija aniqlashtiriladi. Modellash natijalari ushbu kombinatsiyalashgan yondashuv ayrim amaliy masalalarda hisoblash tezligi va aniqlik o'rtasida optimal muvozanatni ta'minlashi mumkinligini ko'rsatdi.

Umuman olganda, olingan natijalar va olib borilgan muhokamalar shuni ko'rsatadiki, to'g'ri to'rtburchak (Riman) va trapetsiya usullari sonli integrallashning muhim va asosiy vositalari bo'lib, ularning har biri muayyan sharoitlarda samarali qo'llanish imkoniyatiga ega. Statistik tahlil va modellash natijalari trapetsiya usulining yuqoriroq aniqlik va tezroq yaqinlashuv xususiyatlariga ega ekanligini tasdiqlaydi. Shu bilan birga, to'g'ri to'rtburchak usuli o'zining soddaligi va algoritmik qulayligi bilan ayrim hisoblash masalalarida dolzarbligini saqlab qoladi. Ushbu xulosalar sonli integrallash masalalarini



yechishda ilmiy asoslangan va samarali metod tanlash uchun muhim amaliy tavsiyalarni beradi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda aniq integralni sonli hisoblashda keng qo'llaniladigan to'g'ri to'rtburchak (Riman) va trapetsiya usullarining nazariy asoslari, amaliy samaradorligi hamda hisoblash aniqligi statistik tahlil va modellashtirish asosida chuqur o'rganildi. Tadqiqot natijalari ushbu ikki usulning mohiyatini yanada aniqroq yoritib berish bilan birga, ularni qaysi sharoitlarda qo'llash maqsadga muvofiq ekanligini ilmiy asosda aniqlash imkonini berdi. O'tkazilgan tahlillar shuni ko'rsatdiki, to'g'ri to'rtburchak (Riman) usuli algoritmik jihatdan sodda va hisoblash jarayoni tez bajarilishi bilan ajralib turadi. Ushbu xususiyat uni boshlang'ich taxminiy hisoblashlar, o'quv jarayoni va aniqlik talabi nisbatan past bo'lgan masalalarda qulay usul sifatida namoyon qiladi. Biroq statistik natijalar shuni ko'rsatadiki, bo'linmalar soni kam bo'lgan holatlarda Riman usulida xatolik sezilarli darajada yuqori bo'lib, integralning haqiqiy qiymatidan katta og'ishlar kuzatiladi. Bu holat funksiya qiymatining faqat bitta nuqtada baholanishi bilan bog'liq bo'lib, funksiya xulq-atvorining to'liq inobatga olinmasligiga olib keladi.

Trapetsiya usuli esa amaliy natijalarga ko'ra nisbatan yuqori aniqlik va barqarorlikka ega ekanligini namoyon etdi. Ushbu usulda har bir kichik oraliqda funksiyaning ikki chekka nuqtadagi qiymatlari hisobga olinishi natijasida funksiya grafigi yaxshiroq yaqinlashtiriladi. Statistik tahlil va grafik modellashtirish natijalari trapetsiya usulining xatolik darajasi tezroq kamayishini va bo'linmalar soni ortishi bilan haqiqiy integral qiymatiga tezroq yaqinlashishini tasdiqladi. Shu sababli, yuqori aniqlik talab etiladigan muhandislik, fizika va matematik modellashtirish masalalarida trapetsiya usuli samaraliroq vosita sifatida baholanadi. Tadqiqot davomida bo'linmalar sonining hisoblash aniqligiga ta'siri alohida tahlil qilinib, har ikkala usulda ham bo'linmalar soni ortishi natijada aniqlikning oshishiga olib kelishi aniqlandi. Biroq hisoblash xarajatlari nuqtayi nazaridan trapetsiya usuli optimalroq ekanligi ko'rsatildi, chunki Riman usulida shunga o'xshash aniqlikka erishish uchun sezilarli darajada ko'proq bo'linmalar talab etiladi. Bu esa amaliy hisoblashlarda vaqt va resurslar sarfini oshiradi. Tadqiqotda yangi yondashuv sifatida to'g'ri to'rtburchak va trapetsiya usullarini kombinatsiyalash g'oyasi ilgari surildi. Ushbu yondashuv hisoblashning dastlabki bosqichida tezkor taxminiy qiymat olish, keyingi bosqichda esa aniqlikni oshirish imkonini beradi. Modellashtirish natijalari bunday kombinatsiyalashgan yondashuv ayrim amaliy masalalarda samarali bo'lishi mumkinligini ko'rsatdi.

Foydalanilgan adabiyotlar

- 1) Isroilov M. «Hisoblash metodlari», T., "O'zbekiston", 2003
- 2) Shoxamidov Sh.Sh. «Amaliy matematika unsurlari T., "O'zbekiston", 1997



3) Boyzoqov A., Qayumov Sh. «Hisoblash matematikasi asoslari», O`quv qo`llanma. Toshkent 2000.

4) Abduqodirov A.A. «Hisoblash matematikasi va programmalash», Toshkent. "O`qituvchi" 1989.

5) Vorob`eva G.N. i dr. «Praktikum po vichislitel'noy matematike» M. VSh. 1990.

6) Abduhamidov A., Xudoynazarov S. «Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari», T.1995.

7) Siddiqov A. «Sonli usullar va programmashtirish», O`quv qo`llanma. T.2001.

8) **"Sonli yondashuvlar va Galerkin metodlari"**, S. Mustafоеv. (O'zbekiston, 2018)