



MUSBAT BLOK MATRITSALAR

Yahyoyeva Ozoda Qahhor qizi

Buxoro Davlat Universiteti fizika- matematika va axborot texnologiyalari fakulteti talabasi.

Email: ozodayahyoyeva380@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada Blok matritsasi haqida tushuncha, Blok matritsasini qo'llash, Blok matritsasiga oid bir nechta teoremlar va misollar berildi. Blok matritsasi matematikada Algebra va funksional analiz fanida ko'p uchraydi.

Annotation. Annotation. This paper provides an overview of the **Partitioned** matrix, the application of the **Partitioned** matrix, and several theorems and examples related to the **Partitioned** matrix. The **Partitioned** matrix is common in mathematics and in the science of algebra and functional analysis.

Kalit so'zlar: Blok matritsa, argument, kompleks, vektor, matritsa, transponerlash, musbat matritsa, funksiya, simetrik

Key words: Partitioned, argument, complex, vector, matrix, transponder, positive matrix, function, symmetric

Quyudagi ko'rinishdagi $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} 2 \times 2$ blok matritsaning, musbat matritsalarni o'rganishdagi xossalarini ko'rib chiqamiz.

$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ blok matritsaning A, B, C, D elementlari $n \times n$ matritsalardan iborat. Shunday qilib, blok matritsaning kengaytirilgan (kata) matritsasi M_{2n} yoki $\mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ ning elementidir. Biz davom ettirib A ning bir qancha xossalarini olish mumkinligini ko'ramiz A yozuvlardan biri bo'lgan blok matritsasi. Maxsus muhimligi shundaki, bu musbatligi (algebraik xususiyat) va kontraktlik (metrik xususiyat).

Kerakli tushunchalarni kiritamiz. A matritsaning qutb parchalanish ifodasi uchun $A = U \cdot P$ yozamiz, bunda U unitar, P esa musbat matritsa, 1.3.4-xossaga ko'ra $P = (A^* \cdot A)^{\frac{1}{2}}$ ekanligi ma'lum. Bu A ning musbat qiymati yoki absolut qiymati deyiladi va $|A|$ shaklida yoziladi. Biz $A^* = P \cdot U^*$ ga egamiz va

$$|A^*| = (A \cdot A^*)^{\frac{1}{2}} = (U \cdot P^2 \cdot U^*)^{\frac{1}{2}} = U \cdot P \cdot U^*$$

Agar $A \cdot A^* = A^* \cdot A$ bo'lsa, A normal matritsa deyiladi. Bu shart ekvivalent $U \cdot P = P \cdot U$; va $|A| = |A^*|$ sharti.

A ning yagona qiymat qismlarga ajratish (SVD) uchun $A = U \cdot S \cdot V$ yozamiz. Bu erda U va V birlik, S esa manfiy bo'lmagan diagonaldir diagonal yozuvlar $s_1(A) \geq \dots \geq s_n(A)$. Bu A ning yagona qiymatlari (A ning xos qiymatlari). $\|A\|$ belgisi har doim $\mathcal{H}$ Gilbert fazosida chiziqli operaor A ning normasini sifatida tasvirlanadi; ya'ni,

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} \|Ax\| = \sup_{|x| \leq 1} \|Ax\|$$



Bundan $|A| = s_1(A)$ ekanligini ko'rish mumkin.

Ushbu normaning muhim xususiyatlari qatoriga quyidagilar kiradi:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

$$\|A\| = \|A^*\|$$

$$\|A\| = \|U \cdot A \cdot V\| \text{ unitar } U, V \text{ u} \quad (1.1.1)$$

oxirgi xossa unitar o'zgaruvchanlik deb ataladi. Bundan

$$\|A^* \cdot A\| = \|A\|^2 \quad (1.1.2)$$

M_n da ko'pgina boshqa normalar mavjud, uchta xususiyat (1.1.1) da ko'rsatilindi. Operator normasini $\|\cdot\|$ qiladigan shart (1.1.2) juda muhim.

Agar $\|A\| \leq 1$ bo'lsa, A qisqaruvchi deymiz.

1.1.1 xossa agar operator $\begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix}$ musbat bo'lsa u holda A operatori qisqaruvchi bo'ladi.

Isbot. $\mathcal{H}$ bir o'lchovli bo'lganda teorema qanday bo'ladi?

Shunchaki, agar a kompleks son bo'lsa, u holda $|a| \leq 1$ agar va faqat agar 2×2 matritsa $\begin{bmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{bmatrix}$ musbat bo'lsa. Birdan ko'pga o'tish o'lchamlari SVD orqali amalga oshiriladi. $A = USV$ bo'lsin. Keyin

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & U \cdot S \cdot V \\ V^* \cdot S \cdot U^* & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & O \\ O & V^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & S \\ S & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^* & O \\ O & V \end{bmatrix}.$$

Bu matritsa $\begin{bmatrix} I & S \\ S & I \end{bmatrix}$ unitar ekvivalent, qaysiki to'g'ridan-to'g'ri yig'indiga teng

$$\begin{bmatrix} 1 & s_1 \\ s_1 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & s_2 \\ s_2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{bmatrix} 1 & s_n \\ s_n & 1 \end{bmatrix},$$

Bu yerda $s_1, \dots, s_n$ lar A ning yagona qiymatlari. Bu 2×2 matritsalar

$s_1 \leq 1$ (ya'ni, $\|A\| \leq 1$) bo'lsa, hammasi musbat bo'ladi.

1.1.1-misol. $\begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} = I_2$ matritsa berilgan bo'lsa, matritsani parchalanishga tekshiring.

$\begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ birlik ya'ni musbat matritsa.

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & U \cdot S \cdot V \\ V^* \cdot S \cdot U^* & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & O \\ O & V^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & S \\ S & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^* & O \\ O & V \end{bmatrix}$$

$A = U \cdot S \cdot V$ liini inobatga olsak $S = [1]$ U va V unitary $U = [i]$ va $V = [-i]$ deb olib parchalanishni ko'rsatamiz

$A = [i][1][-i] = -i^2 = 1$ o'rinli

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

U holda 1.1.2- xossa ko'ra A parchalanish.

1.1.1-teorema. A, B musbat matritsalar bo'lsin. $\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix}$ blok matritsa musbat bo'lishi uchun ba'zi bir K parchalanish uchun $X = A^{\frac{1}{2}} \cdot K \cdot B^{\frac{1}{2}}$ bo'lishi kerak.

Isbot. A, B qat'iy musbat matritsa bo'ladi deb faraz qilaylik. U holda bu quyidagi moslikdan foydalanishga imkon beradi

$$\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & B^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & B^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B^{-\frac{1}{2}} \cdot X \cdot A^{-\frac{1}{2}} \\ B^{-\frac{1}{2}} \cdot X^* \cdot A^{-\frac{1}{2}} & I \end{bmatrix}$$

$K = A^{-\frac{1}{2}} \cdot X \cdot B^{-\frac{1}{2}}$ berilgan bo'lsin. So'ng 1.1.1 xossadan bu blok matritsa musbat bo'ladi, faqatgina K parchalanish bo'lsa. Bu teoremani A, B qat'iy musbat bo'lgan hol uchun isbotlaydi. Umumiy holat quyidagicha davomiylik argumenti bilan.

1.1.1-teoremadan kelib chiqadiki, agar $\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix}$ musbat bo'ladi, X rangi A rangining qism fazosi va X^* rangi B rangining qism fazosi bo'lsa. A rangi yoki B rangi X ning rangidan ham oshmasligi kerak.

1.1.2-teorema. A, B qat'iy musbat matritsalar berilgan bo'lsin. Agar $A \geq X \cdot B^{-1} \cdot X^*$ bo'lsa $\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix}$ blok matritsasi musbat bo'ladi.

Isbot. Bizda quyidagi bor

$$\begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I & -X \cdot B^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & X \\ X^* & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B^{-1} \cdot X^* & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - X \cdot B^{-1} \cdot X^* & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Shubhasiz, bu oxirgi matritsa faqat $A \geq X B^{-1} X^*$ bo'lsa musbat bo'ladi.

Ikkinchi isbot. Bizda $A \geq X B^{-1} X^*$ mavjud agar va faqat agar

$$I \geq A^{-\frac{1}{2}} \cdot (X B^{-1} X^*) A^{-\frac{1}{2}} = A^{-\frac{1}{2}} X B^{-\frac{1}{2}} \cdot B^{-\frac{1}{2}} X^* A^{-\frac{1}{2}} = \left(A^{-\frac{1}{2}} X B^{-\frac{1}{2}} \right) \left(A^{-\frac{1}{2}} X B^{-\frac{1}{2}} \right)^*$$

Bu $\|A^{-\frac{1}{2}} X B^{-\frac{1}{2}}\| \leq 1$ yoki $X = A^{\frac{1}{2}} K B^{\frac{1}{2}}$ bu yerda $\|K\| \leq 1$ deyishga teng. Endi 1.1.2 teoremadan foydalanamiz.

1.1.1-lemma. A matritsasi musbat bo'ladi faqatgina $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$ musbat bo'lsa.

Isbot. U holda bu ifodani quyidagi ko'rinishda yozishimiz mumkin

$$\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & A^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & A^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.1-xulosa. A biron matritsa berilgan bo'lsin. U holda $\begin{bmatrix} |A| & A^* \\ A & |A^*| \end{bmatrix}$ matritsa musbat bo'ladi.

Isbot. $A = UP$ qutb parchalanishi foydalanin yozamiz

$$\begin{bmatrix} |A| & A^* \\ A & |A^*| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & P \cdot U^* \\ U \cdot P & U \cdot P \cdot U^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P \\ P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U^* \end{bmatrix}$$

va keyin lemmadan foydalanamiz.



1.1.2-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan bo'lsin, u holda $\begin{bmatrix} |A| & A^* \\ A & |A^*| \end{bmatrix}$ musbatlikda tekshiringa

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} |A| & A^* \\ A & |A^*| \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & O \\ O & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P \\ P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & U^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P & P \\ P & P \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.1.1 lemmaga ko'ra $\begin{bmatrix} P & P \\ P & P \end{bmatrix}$ musbat aniqlanganligidan, demak $\begin{bmatrix} |A| & A^* \\ A & |A^*| \end{bmatrix}$ musbat anilangan.

1.1.2-xulosa. Agar A matritsa normal bo'lsa, u holda $\begin{bmatrix} |A| & A^* \\ A & |A^*| \end{bmatrix}$ musbat bo'ladi.

1.1.3-misol. Agar $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ berilgan bo'lsa, u holda $\begin{bmatrix} |A| & A^* \\ A & |A^*| \end{bmatrix}$ matritsani musbatlikga tekshiring

Dastavval A matritsani normallikda teshirsak ya'ni $AA^T = A^T A$ o'rinli ekanini ko'rsatamiz

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{bundan } A \text{ matritsa normal}$$

1.1.1 -xulosadan foydalansak

$$\begin{bmatrix} |A| & A^* \\ A & |A^*| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P \\ P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & U^* \end{bmatrix} \quad A = PU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} |A| & A^* \\ A & |A^*| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P \\ P & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & U^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & U^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

I_4 birlik matritsaga keladi bu matritsa musbat aniqlanganidan Blok matritsa musbat aniqlanganligi kelib chiqadi.





Musbat aniqlangan matrirsalarning Shur to'ldiruvchisi

M_n da A berilgan bo'lsa, S_A M_n da anilani, chiziqli xarita bo'lsin

$$S_A(X) = A^\circ X, \quad X \in M_n, \quad (1.1.3)$$

Bu erda $A^\circ X$ A va X ning Shur ko'paytmasi. Chiziqli operator normasi haqidagi ta'rifga ko'ra,

$$\|S_A\| = \sup_{\|X\|=1} \|S_A(X)\| = \sup_{\|X\|\leq 1} \|S_A(X)\| \quad (1.1.4)$$

$$\|A \cdot B\| \leq \|A \otimes B\| = \|A\| \|B\| \quad (1.1.5)$$

Bizda quyudagi munosabat bor

$$\|S_A\| \leq \|A\| \quad (1.1.6)$$

$\|S_A\|$ isning aniq qiymatini topish umuman qiyin muammo.

Ba'zi maxsus holatlar osonroq.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev Chiziqli algebra . Darslik 2023 y.
2. А. С. Мищенко, Эрмитова К-теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа, УМН, 1976, том 31
3. С. П. Новиков , Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов Z-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонового формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов. I, Изв. АН, сер. матем.
4. И.М. Гельфанд , А. С.Мищенко , Квадратичные формы над коммутативными групповыми кольцами и Z-теория, Функц. Анализ
5. Г. Г. К а с п а р о в, Обобщенный индекс эллиптических операторов, Функц. анализ