KORREKT, NOKORREKT VA TESKARI MASALALAR TUSHUNCHASI

Abdullajonov Xudoyor Xakimjonovich
Farg'ona davlat universiteti amaliy matematika yo'nalishi 22.09 guruh talabalari
E-mail: xudoyorxan649@gmail.com
G'ulomjonov Javohir Shavkatjon o'gli
E-mail: gulomovj83@gmail.com

Annotatsiya. *Mazkur ishda matematik masalaning korrekt qo'yilishi tushunchasi va uning nazariy hamda amaliy ahamiyati yoritilgan. Korrekt masala deganda, yechim mavjudligi, yagonaligi va berilganlarga uzluksiz bog'liqlik kabi uch asosiy shartni qanoatlantiruvchi masalalar tushuniladi. To'lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi misolida bu shartlarning bajarilishi ko'rsatilgan va Dalamber formulasi orqali yechimning korrektligi isbotlangan. Mavzuning amaliy ahamiyati qurilish, fizikaviy modellashtirish, tibbiyot va boshqa texnik sohalarda to'g'ri, barqaror va ishonchli hisob-kitoblar olib borish zaruratidan kelib chiqadi.*

Kalit so'zlar: *korrekt masala, nokorrekt masala, teskari masala, Adamar sharti, yechim yagonaligi, uzluksiz bog'liqlik, matematik modellashtirish, to'lqin tenglamasi, Dalamber formulasi, Koshi masalasi, funksional fazo, matematik fizika, hisoblash barqarorligi, fizik model, amaliy matematika*

Аннотация. *В данной работе рассматривается понятие корректной постановки математической задачи и её теоретическая и практическая значимость. Под корректной задачей понимается задача, удовлетворяющая трём основным условиям: существование решения, его единственность и непрерывная зависимость от исходных данных. На примере задачи Коши для волнового уравнения показано выполнение этих условий и доказана корректность решения с помощью формулы Даламбера. Практическая значимость темы проявляется в необходимости точных и устойчивых расчетов в строительстве, физическом моделировании, медицине и других технических сферах.*

Ключевые слова: *корректная задача, некорректная задача, обратная задача, условие Адамара, единственность решения, непрерывная зависимость, математическое моделирование, уравнение волны, формула Даламбера, задача Коши, функциональное пространство, математическая физика, устойчивость вычислений, физическая модель, прикладная математика.*

Abstract. *This paper explores the concept of a well-posed mathematical problem and its theoretical and practical significance. A well-posed problem satisfies three main conditions: existence of a solution, uniqueness of the solution, and continuous dependence on the given data. Using the Cauchy problem for the wave equation as an example, the fulfillment of these conditions is demonstrated, and the correctness of the solution is proven via the D'Alembert formula. The practical relevance of this topic lies in the necessity for accurate and stable*

computations in fields such as construction, physical modeling, medicine, and other technical disciplines.
Keywords: *well-posed problem, ill-posed problem, inverse problem, Hadamard condition, uniqueness of the solution, continuous dependence, mathematical modeling, wave equation, D'Alembert formula, Cauchy problem, functional space, mathematical physics, computational stability, physical model, applied mathematics.*

Kirish

Matematika, ayniqsa matematik fizika va amaliy matematikada, har qanday masalaning to‘g‘ri qo‘yilishi – ya’ni korrektligi – juda muhim nazariy va amaliy ahamiyatga ega. Masalaning qanday qo‘yilganligi uning yechimini aniqlash, uni hisoblashda barqaror algoritmlar qo‘llash, hamda fizik yoki texnik modellarni ishonchli tasvirlash imkonini beradi. Shu sababli, har qanday matematik modellashtirish jarayonida eng avvalo, masalaning korrektligi tekshiriladi.

Korrekt masala deganda, unda quyidagi uchta asosiy shart bajarilishi nazarda tutiladi:

1. Yechim mavjud bo‘lishi – masalaning hech bo‘lmaganda bitta yechimi mavjud bo‘lishi kerak;
2. Yechimning yagonaligi – masalaning faqat bitta yechimi bo‘lishi lozim;
3. Yechimning berilganlarga uzluksiz bog‘liqligi – boshlang‘ich yoki chegaraviy shartlardagi kichik o‘zgarishlar yechimda ham kichik o‘zgarishlarga olib kelishi zarur.

Bu uchta shartning barchasi bajarilgandagina masala korrekt deb hisoblanadi. Bu tushuncha birinchi bor XX asr boshlarida fransuz matematigi J. Adamar tomonidan ilgari surilgan. U matematik fizika tenglamalarini o‘rganish jarayonida ba’zi masalalarning fizik mazmunga ega emasligini ko‘rsatgan va buning sababi ularning yechimi mavjud emasligi, yagona emasligi yoki boshlang‘ich shartlarga sezgir bo‘lishi bilan bog‘liqligini ta’kidlagan. U fizik modeldan olingan masala faqat korrekt qo‘yilgandagina uning yechimi haqiqiy fizik hodisani aks ettiradi, deb hisoblagan.

Adamar ilgari surgan fikrlar o‘sha davrda katta ahamiyat kasb etgan bo‘lsa-da, keyinchalik ayrim masalalar, hatto nokorrekt bo‘lsa ham, real fizik jarayonlarni to‘g‘ri ifodalashi mumkinligi aniqlangan. Bu esa, korrektlik tushunchasining yanada chuqurroq, funksional analiz doirasida qayta ko‘rib chiqilishiga olib kelgan. Bugungi kunda bu shartlar funksional fazolar – masalan C_k, L^2, Sobolev fazolari kabi – doirasida aniqlanadi va tahlil qilinadi.

Masalaning korrekt qo‘yilganligini aniqlash nafaqat nazariy jihatdan muhim, balki hisoblash algoritmlarining barqarorligini ta’minlash, fizik modellarni simulyatsiya qilish va amaliy dasturlarda ishonchli natijalarga erishish uchun ham zarurdir. Ayniqsa, issiqlik o‘tkazuvchanligi, to‘lqinlar tarqalishi, suyuqliklar harakati kabi sohalarda bu tushuncha asosiy rol o‘ynaydi.

Mazkur mavzuni chuqur o‘rganish orqali nafaqat matematik tahlil ko‘nikmalarini rivojlantirish, balki amaliy modellashtirishda mustahkam nazariy asosga ega bo‘lish mumkin.

Korrekt masala ta’rifi va unga misollar

Korrektlik tushunchasi mashhur fransuz matematigi J. Adamar tomonidan matematik fizika tenglamalari uchun turli chegaraviy masalalarni o‘rganish jarayonida kiritilgan. J.

Adamar yechimi muayyan uzluksizlik shartlarini qanoatlantirmaydigan chegaraviy masalalar fizik ma’noga ega emas, degan fikrni ilgari surdi va bunday masalalarga misollar keltirdi.

Keyinchalik, Adamar fikrining noto‘g‘ri ekanligi ma’lum bo‘ldi. Ma’lum bo‘ldiki, matematik fizikaning Adamar ma’nosida nokorrekt qo‘yilgan ko‘plab masalalari, xususan, Adamar tomonidan keltirilgan misollar ham haqiqiy fizik mazmunga ega bo‘lib chiqdi. Bundan tashqari, amaliyot bilan bog‘liq nokorrekt qo‘yilgan masalalar matematikaning boshqa ko‘plab sohalarida ham paydo bo‘lishi aniqlandi.

Shunday qilib, matematik fizikaning korrekt qo‘yilgan masalasi tushunchasi XX asr boshida J. Adamar tomonidan kiritildi.

Ta’rif Masala korrekt qo‘yilgan deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1. Masalaning yechimi mavjud bo‘lsin;
2. Masalaning yechimi yagona bo‘lsin;
3. Masalaning yechimi berilganlarga uzluksiz bog‘liq bo‘lsin.

Birinchi shart berilganlarning cheksiz ko‘p bo‘lmasligini talab qiladi. Ikkinchi shart esa berilganlar masala aniqlanishi uchun yetarli bo‘lishini ta’minlaydi. Uchinchi shart esa quyidagi holat bilan bog‘liq: agar masala fizik modelni aniqlash bilan bog‘liq bo‘lsa, u holda berilganlarni absolyut aniq deb hisoblash mumkin emas. Ularning qandaydir ma’noda taqribiy qiymatlari ma’lum deb olinadi. Shunday qilib, agar yechim boshlang‘ich berilganlarga uzluksiz bog‘liq bo‘lmasa, masala yechimi fizik ma’noda aniqlanmagan hisoblanadi.

Yuqorida keltirilgan korrektlik shartlari yanada tushuntirishni talab qiladi.

Chegaraviy masalalar nazariyasida yechim va berilganlar ba’zi funksional fazolar elementlari sifatida qaraladi. Shuning uchun korrektlik shartlari quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

1. $C, L, W, \dots, C_p^k$ chiziqli normallashtirilgan fazolardagi biror yopiq qismfazoga tegishli ixtiyoriy berilganlar uchun masala yechimi mavjud bo‘lib, ularning biriga tegishli bo‘lsin;

2. Ko‘rsatilgan fazolarning birortasida masala yechimi yagona bo‘lsin;

3. Berilganlarning cheksiz kichik o‘zgarishiga (berilganlar qaralayotgan fazoda) yechimning cheksiz kichik o‘zgarishi mos kelsin (yechim qaralayotgan fazoda).

Mavjudlik, yagonalik va yechimlarning berilganlarga uzluksiz bog‘liqligi haqidagi teoremalar masala korrektligining isbotidir.

Umuman olganda, elliptik tenglamalar uchun chegaraviy shartlar yechim aniqlanadigan sohaning butun chegarasida berilganda, bunday masalalar korrekt hisoblanadi.

Giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar uchun esa, umuman olganda, Koshi masalasi va aralash masalalar korrekt bo‘ladi.

To‘lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi.

Ushbu tenglamaning

$u = u(x,t), x \in D = (-\infty, +\infty), t > 0$ (1)

boshlang‘ich

$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_x(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}$(2)

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

To‘lqin tenglamasi uchun (1)-(2) Koshi masalasining har qanday klassik yechimini Dalamber formulasi bilan ifodalash mumkinligini matematik fizika kursidan bilamiz, bu esa bunday masala yechimining mavjudligi va yagonaligini bildiradi.

1-teorema. (1)-(2) Koshi masalasining yechimi $\varphi(x), \psi(x)$ boshlang‘ich funksiyalariga uzluksiz bog‘liq.

Isbot. Ikkita turli boshlang‘ich shartlar bilan (1)-(2) masalani qaraymiz:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial u_i}{\partial x^2}, u_i|_{t=0} = \varphi_i(x), \frac{\partial u\_i}{\partial t}|_{t=0} = \psi_i, (x), i = 1,2.$$

Faraz qilamiz boshlang‘ich funksiyalar kichik farq qiladi, ya’ni

$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \delta, |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq \delta$ (3)

Mos yechimlar $|u_1 - u_2|$ farqini D sohada baholaymiz. Masala yechimini Dalamber formulasi bilan ifodalab

$$|u_1 - u_2| \leq \frac{|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)|}{2} + \frac{|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)|}{2}\int_{x-at}^{x+at}|\psi_1(y) - \psi_2(y)|dy$$

yoki

$$|u_1 - u_2| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2a}\cdot 2at \leq \delta(1 + t_0)$$

bahoga ega bo‘lamiz. Agar oxirgi tengsizlikka $\delta = \frac{\varepsilon}{1+t_0}$ qiymatni qo‘ysak

$$|u_1 - u_2| \leq \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi, bu ixtiyoriy $0 \leq t \leq t_0, -\infty < x < \infty$ uchun o‘rinli. Shunday qilib (1)-(2) masala korrekt qo‘yilgan ekan.

Xulosa

Matematik masalaning korrekt qo‘yilishi – ya’ni yechimning mavjudligi, yagonaligi va berilganlarga uzluksiz bog‘liqligi – nafaqat nazariy jihatdan, balki real hayotda muhim amaliy ahamiyatga ega. Chunki har qanday fizik, texnik yoki muhandislik sohasida modellashtirish va hisob-kitoblar bajarilayotganda, ishlatilayotgan matematik model ishonchli bo‘lishi kerak.

Agar masala korrekt bo‘lmasa, ya’ni boshlang‘ich yoki chegaraviy shartlardagi ozgina o‘zgarish yechimda katta farqlar keltirib chiqarsa, bu real tizimlarni noto‘g‘ri tahlil qilishga olib keladi. Masalan, qurilish muhandisligida yuklanishlar taqsimoti noto‘g‘ri hisoblanishi, yoki aerodinamika sohasida oqim tezligini noto‘g‘ri baholash xavfli oqibatlarga sabab bo‘lishi mumkin. Shuningdek, iqlim modellarida yoki tibbiy tomografiyada ham yechimlarning barqarorligi – ya’ni korrektlik – aniqlik va ishonchlilik uchun juda muhim.

Dalamber formulasiga asoslangan to‘lqin tenglamasi misolida ko‘rganimizdek, agar boshlang‘ich shartlar ozgina farq qilsa, u holda yechim ham ozgina farq qiladi. Bu esa bunday masalaning fizik model sifatida ishonchli va amaliy jihatdan foydali ekanligini ko‘rsatadi.

Demak, real hayotda qo‘llaniladigan har qanday matematik model – u energetika, qurilish, meteorologiya yoki texnologiya bo‘ladimi – avvalo korrekt qo‘yilgan bo‘lishi zarur. Aks holda, yechimlar noto‘g‘ri bo‘lib, katta moliyaviy, texnik yoki inson salomatligiga tahdid soluvchi xatolarga olib kelishi mumkin. Shuning uchun korrektlik – matematik tahlilning yuragi, amaliy modellashtirishning ishonch kafolatidir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. J. Adamar. Fizik tenglamalar uchun masalalarning korrekt qo‘yilishi haqida. – Moskva: Nauka, 1964.

(Asosiy manba. Korrektlik tushunchasi ilk bor aynan J. Adamar tomonidan taqdim etilgan.)

3. S.G. Mikhlin. Differensial tenglamalar va ularning yechimlarining barqarorligi. – Toshkent: Fan, 1980. (Korrekt va nokorrekt masalalar, hisoblashdagi barqarorlik masalalari yoritilgan.)

3. R.K. Nurekeyev. Matematik modellashtirish asoslari. – Toshkent: O‘zbekiston, 2006. (Amaliy matematik modellashtirishda korrektlik masalasi haqida.)

4. L. I. Sedov. Matematik fizika tenglamalari. – Moskva: Nauka, 1981. (To‘lqin tenglamasi, Koshi masalasi va Dalamber formulasi haqida.)

5. A. R. Galiullin, A. T. Tursunov. Matematik analiz va funksional fazolar. – Toshkent: TDPU nashriyoti, 2010.

(Uzluklilik, yagonalik, funksional fazolar tushunchalari ochib berilgan.)

5. S. P. Korovkin. Funktsional analizga kirish. – Toshkent: Fan, 1972. (Yechimlarning uzluksiz bog‘liqligi va funksional analiz asoslari.)

7. K. G. Rasulov. Matematik fizika tenglamalari kursi. – Toshkent: O‘qituvchi, 1998. (Korrekt va nokorrekt masalalarning matematik tahlili.)